Contrôle TD 1

Nom : Prénom : Classe :

Question de cours

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$; $a < b$. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction f définie sur l'intervalle $[a, b]$.

$\boxed{\text{Si } f \text{ est continue sur l'intervalle } [a,b] \text{ et si } f(a)f(b) \leqslant 0 \quad \text{alors } \exists\, c \in [a,b], \quad f(c) = 0.}$

Exercice 1

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}\left(x^2 - x + 6\right)$ et (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} & u_0 = x \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la suite (u_n) est constante.

(u_n) constante $\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(u_n) = u_n \iff f(x) = x$

$f(x) = x \iff x^2 - x + 6 = 4x \iff x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad \Delta = 25 - 24 = 1 \qquad x_1 = \dfrac{5-1}{2} = 2 \quad x_2 = \dfrac{5+1}{2} = 3$

$\boxed{(u_n) \text{ constante} \iff x \in \{2, 3\}}$

b. Établir le tableau de variations de f et montrer que l'intervalle $]2, 3[$ est stable par f.

$f'(x) = \dfrac{1}{4}(2x - 1) = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$

On établit le tableau de variation de f.

	$\frac{1}{2}$		2		3		$+\infty$
f'		$+$		$+$		$+$	
f	$\frac{23}{16}$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

f est strictement croissante sur $[2, 3]$, $f(2) = 2$ et $f(3) = 3$ donc $f\left(]2, 3[\right) =]2, 3[$.

$\boxed{]2, 3[\text{ est stable par } f.}$

c. On suppose que (u_n) converge vers l, $l \in \mathbb{R}$. Quelles sont les valeurs possibles de l ? Justifiez votre réponse.

D'après le cours, si (u_n) est une suite récurrente vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ et si u_n converge, alors sa limite l est un point fixe de f : $f(l) = l$.

$\boxed{\text{Donc } l \in \{2, 3\}.}$

Exercice 2

Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f(x) = e^{-x}\sin(x)$.

$e^{-x} = e^X$ où $X = -x$ donc :

$$e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + \frac{(-x)^4}{4!} + o(x^4)$$
$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$f(x) = \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) = x - \frac{x^3}{6} - x^2 + \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

$$\boxed{f(x) = x - x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^4)}$$

Exercice 3

Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $(E):\ 2(1+t)y' + y = 3$ sur $]-1, +\infty[$.

Résolution de l'équation homogène : $(E_0):\ 2(1+t)y' + y = 0$

$\frac{b}{a} = \frac{1}{2(1+t)}$ Sa primitive est : $\int \frac{1}{2(1+t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(1+t)$

Les solutions de (E_0) sont : $\mathcal{S}_0 = \left\{ y_0 = ke^{-\frac{1}{2}\ln(1+t)} = \frac{k}{\sqrt{1+t}}\ , \quad k \in \mathbb{R} \right\}$

Solution particulière :
On remarque que si $y = 3$, $y' = 0$ et en remplaçant dans (E) : $2(1+t)\times 0 + 3 = 3$
$y_p = 3$ est une solution particulière de (E).

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E) \text{ est : } \mathcal{S} = \left\{ y = 3 + \frac{k}{\sqrt{1+t}}\ ,\ k \in \mathbb{R} \right\}.}$$