Contrôle TD 1

Nom : Prénom : Classe :

Exercice 1

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$; $a < b$. f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que $f(a) = -g(b)$ et $f(b) = -g(a)$.
Montrer que : $\exists\, c \in [a, b]\,,\ f(c) + g(c) = 0$

Soit ϕ la fonction définie sur $[a, b]$ par $\phi(x) = f((x) + g(x)$.

ϕ est continue comme somme de fonctions continues.
$\phi(a)\phi(b) = (f((a) + g(a))\,(f((b) + g(b)) = (f((a) - f(b))\,(f((b) - f(a)) = -\left(f((a) - f(b)\right)^2 \leqslant 0$

Donc d'après le TVI, $\exists\, c \in [a, b]\,,\ \phi(c) = f(c) + g(c) = 0$

Exercice 2

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}\left(x^2 - x + 4\right)$ et (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} & u_0 = x \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N} & u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la suite (u_n) est constante.

(u_n) constante $\iff \forall n \in \mathbb{N},\quad f(u_n) = u_n \iff\ f(x) = x$

$f(x) = x \iff x^2 - x + 4 = 4x \iff x^2 - 5x + 4 = 0 \qquad \Delta = 25 - 16 = 9 \qquad x_1 = \dfrac{5-3}{2} = 1 \quad x_2 = \dfrac{5+3}{2} = 4$

$\boxed{(u_n) \text{ constante} \iff x \in \{1, 4\}}$

b. Établir le tableau de variations de f et montrer que l'intervalle $]4, +\infty[$ est stable par f.

$f'(x) = \dfrac{1}{4}(2x - 1) = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$

On établit le tableau de variation de f.

	$\frac{1}{2}$		1		4		$+\infty$
f'		$+$		$+$		$+$	
f	$\frac{15}{16}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

f est strictement croissante sur $]4, +\infty[$, $f(4) = 4$ et $\displaystyle\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$ donc $f\left(]4, +\infty[\right) =]4, +\infty[$.

$\boxed{]4, +\infty[\text{ est stable par } f.}$

c. On suppose que (u_n) converge vers l, $l \in \mathbb{R}$. Quelles sont les valeurs possibles de l ? Justifiez votre réponse.

D'après le cours, si (u_n) est une suite récurrente vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ et si u_n converge, alors sa limite l est un point fixe de f : $f(l) = l$.

$\boxed{\text{Donc } l \in \{1, 4\}.}$

Exercice 3

a. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $f(x) = \dfrac{1}{1+x}\cos(x)$.

$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$

$\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$

$f(x) = \left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)\right)\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)\right) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o(x^4)$

$\boxed{f(x) = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{13x^4}{24} + o(x^4)}$

Exercice 4

Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $(E):\ (1+t)y' + 3y = 3$ sur $]-1, +\infty[$.

Résolution de l'équation homogène : $(E_0):\ (1+t)y' + 3y = 0$

$\dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{(1+t)}$ Sa primitive est : $\displaystyle\int \dfrac{3}{(1+t)}\,\mathrm{d}t = 3\ln(1+t)$

Les solutions de (E_0) sont : $\mathcal{S}_0 = \left\{ y_0 = ke^{-3\ln(1+t)} = \dfrac{k}{(1+t)^3}\ , \quad k \in \mathbb{R} \right\}$

Solution particulière :
On remarque que si $y = 1$, $y' = 0$ et en remplaçant dans (E) : $(1+t)\times 0 + 3 = 3$
$y_p = 1$ est une solution particulière de (E).

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E) \text{ est : } \mathcal{S} = \left\{ y = 1 + \dfrac{k}{(1+t)^3}\ ,\ k \in \mathbb{R} \right\}.}$