Correction Midterm

Mécanique

Exercice 1. Questions de cours (5 points – pas de points négatifs pour le QCM). Pour certaines questions il faut cocher plusieurs bonnes réponses.

1. L'unité d'une force est :

a. Le Newton N.
b. Le m.s^{-2}.
c. Le kg.m.s.
d. Le kg.s^{-2}.

Pour les questions 2 à 4 on donne les équations du mouvement : $\begin{cases} x(t) = v_0.\cos(\alpha).t \\ y(t) = v_0.\sin(\alpha).t - 5t^2 \end{cases}$

2. L'expression du vecteur position peut s'écrire :

a. $\overrightarrow{OM}(t) = v_0.\cos(\alpha).t + v_0.\sin(\alpha).t - 5t^2$

b. $\overrightarrow{OM}(t) = x(t) + y(t)$

c. $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\overrightarrow{u_x} + y(t)\overrightarrow{u_y}$

d. $\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} v_0.\cos(\alpha).t \\ v_0.\sin(\alpha).t-5t^2 \end{pmatrix}$

3. L'expression du vecteur vitesse peut s'écrire :

a. $\overrightarrow{v(t)} = v(t)\,\overrightarrow{u_x} + v(t)\overrightarrow{u_y}$

b. $\overrightarrow{v(t)} = v_0.\cos(\alpha)\,\overrightarrow{u_x} + (v_0.\sin(\alpha) - 10t)\,\overrightarrow{u_y}$

c. $\overrightarrow{v(t)} = v_0.\sin(\alpha)\,\overrightarrow{u_x} + (v_0.\cos(\alpha) - 10t)\,\overrightarrow{u_y}$

d. $\overrightarrow{v(t)} = v_0.\sin(\alpha)\,\overrightarrow{u_x} - (v_0.\cos(\alpha) - 10t)\,\overrightarrow{u_y}$

4. La norme du vecteur vitesse vaut :

a. $\left\|\overrightarrow{v(t)}\right\| = \sqrt{(v_0.\cos(\alpha))^2 + (v_0.\sin(\alpha) - 10t)^2}$

b. $\left\|\overrightarrow{v(t)}\right\| = \sqrt{v_0.\cos(\alpha) + (v_0.\cos(\alpha) - 10t)}$

c. $\left\|\overrightarrow{v(t)}\right\| = \sqrt{{v_0}^2.\cos^2(\alpha) + ({v_0}^2.\cos^2(\alpha) - 100t^2)}$

d. $\left\|\overrightarrow{v(t)}\right\| = \sqrt{(v_0.\cos(\alpha))^2 + (v_0.\cos(\alpha) + 10t)^2}$

5. Soit un point M ayant pour vecteur vitesse : $\overrightarrow{\mathrm{v(t)}} = \binom{5t}{4}$. On donne les conditions initiales suivantes : $\overrightarrow{OM(t=0)} = \binom{0}{1}$. Les expressions correctes sont :

a. $\overrightarrow{OM(t)} = \begin{pmatrix} 5t^2/2 \\ 4t+1 \end{pmatrix}$

b. $\overrightarrow{OM(t)} = \binom{5}{0}$

c. $\overrightarrow{a(t)} = \begin{pmatrix} 5(t^2+1) \\ 4t \end{pmatrix}$

d. $\overrightarrow{a(t)} = \binom{5}{0}$

Exercice 2 : Tir au tennis (8 points)

Un terrain de tennis est un rectangle de longueur 23,8 m et de largeur 8,23 m. Il est séparé en deux dans le sens de la largeur par un filet dont la hauteur est 0,920 m. Lorsqu'un joueur effectue un service, il doit envoyer la balle dans une zone comprise entre le filet et une ligne située à 6,40 m du filet. On étudie un service du joueur placé au point O.

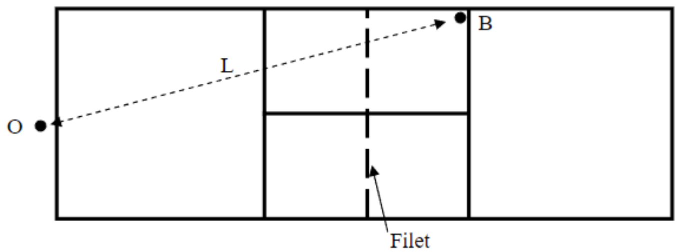


Figure 1 : Schéma du terrain

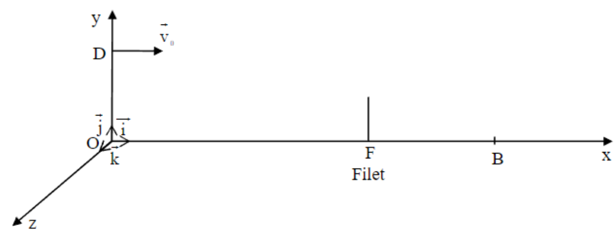


Figure 2 : Schéma de la situation

Ce joueur souhaite que la balle touche le sol en B tel que OB = L = 18,7 m. Pour cela, il lance la balle verticalement et la frappe avec sa raquette en un point D situé sur la verticale de O à la hauteur H=2,20m. La balle part alors de D avec une vitesse de valeur v_0 = 35.35 m.s^{-1}, horizontale. (fig. 2) La balle de masse m = 58,0 g sera considérée comme ponctuelle. Après le service, nous considèrerons uniquement l'action du poids sur la balle.

1. Donner le cadre d'étude (référentiel, système étudié, système de coordonnées). (1,5pts)

Référentiel : Terrestre (0,5pt)

Système étudié : balle (0,5pt)

Système de coor: cartésien (0,5pt)

2. En appliquant le PFD, donner l'expression du vecteur l'accélération. (1pt)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (0,5)$$

$$\vec{P} = m\vec{a}$$

$$-g = a \ (0,5)$$

3. Donner l'expression du vecteur vitesse. (1pt)

$$\vec{v} = \int \vec{a}\, dt = \begin{pmatrix} v_0 \\ -gt \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Donner l'expression du vecteur position. (1pt)

$$\overrightarrow{OM} = \int \vec{v}\, dt = \begin{pmatrix} v_0 . t \\ -\frac{gt^2}{2} + 2{,}20 \end{pmatrix}$$

5. Etablir l'équation de la trajectoire, c'est-à-dire, y(x). Comment se nomme ce type de trajectoire ? (1pt)

De l'équation sur Ox on trouve : $t = x/v_0$

On remplace dans l'équation sur Oy : $-\frac{gx^2}{2{v_0}^2} + 2{,}20$ (0,5)

C'est une trajectoire parabolique (0,5)

6. Sachant que la distance OF = 10m, la balle, supposée ponctuelle, passe-t-elle au-dessus du filet ? (1,5)

On veut vérifier si la balle passe au-dessus du filet, c'est-à-dire si y(F) > 0,920m (0,5)

Formule littérale (0,5)

$y(10) = -\frac{10\times(10)^2}{2\times 35{,}35^2} + 2{,}20 = 2{,}20 - \frac{1000}{2500} = 2{,}2 - 0{,}4 = 1{,}8m$ (0,5)

La balle passe au-dessus du filet.

7. Montrer que le service sera considéré comme mauvais, c'est-à-dire que la balle frappera le sol en un point B' tel que OB' soit supérieur à OB (1,5pt)

La balle frappe le sol signifie que $y(x_B)=0$. On cherche à voir si $x(x_B)>OB$ (0,5)

$-\frac{gx^2}{2{v_0}^2} + 2{,}20 = 0$ (0,5)

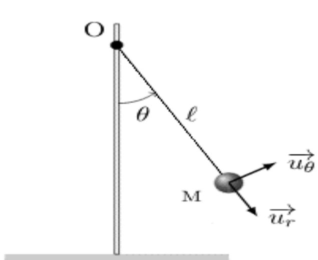
$x = \sqrt{\frac{2\times v_0^2\times 2{,}20}{g}} = \sqrt{\frac{2\times 1250\times 2{,}20}{10}} = 23m$ (0,5)

C'est largement supérieur à 18m. Le calcul de la racine carré est difficile, cependant on s'en fiche de la valeur exacte, c'est facile de voir que c'est supérieur à 20m.

8. En réalité, la balle tombe en B. Quel est le paramètre, non pris en compte dans ce problème, qui peut expliquer cette différence ? (0,5pt)

Les frottements ou l'effet donné à la balle.

Exercice 2 : Pendule en coordonnées polaires (7 points)



Une boule M de masse ***m***, assimilable à un point, est accrochée par un fil de longueur ***l***, en un point O d'une tige métallique. L'angle ***θ*** est l'angle entre la verticale et le fil. Nous nous placerons dans la base polaire afin d'étudier ce problème.

1. Schématiser l'ensemble des forces s'exerçant sur la masse M. (1pt)
2. Rappeler l'expression du vecteur position en coordonnées polaires. (0,5pt)

$$\overrightarrow{OM} = r.\overrightarrow{u_r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Au choix une des deux expressions)

3. En déduire l'expression générale du vecteur vitesse. (1pt)

$$\overrightarrow{v(t)} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(r.\overrightarrow{u_r})}{dt} = \frac{dr}{dt}.\overrightarrow{u_r} + r.\frac{d\,\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dot{r}.\overrightarrow{u_r} + r.\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

(pour la réponse finale, peu importe le milieu)

4. Vérifier que l'expression du vecteur accélération est : (1pt)

$$\overrightarrow{a(t)} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(\dot{r}.\overrightarrow{u_r} + r.\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\right)}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt}\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\frac{d\,\overrightarrow{u_r}}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}$$

$$\overrightarrow{a(t)} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta}$$

5. En considérant le fil comme inextensible, réécrire l'équation précédente. (0,5pt)

$$\overrightarrow{a(t)} = \left(r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta}$$

6. En appliquant le PFD, donner l'expression du vecteur l'accélération en fonction de $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{l}$ et $\boldsymbol{\theta}$. (1pt)

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} = \begin{pmatrix} mg\cos(\theta) - T \\ mg\,sin\,(\theta) \end{pmatrix}$$

7. En faisant l'approximation des petits angles, c'est-à-dire $sin\ \theta \approx \theta$, et en utilisant une des deux équations de la question 6, <u>montrer que</u> l'on peut écrire une équation différentielle d'ordre 2 de la forme :

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

<u>Préciser l'expression de $\boldsymbol{\omega}$.</u> (1pt)

On utilise les équations de la Q5 et Q6 :

$$m\begin{pmatrix} r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg\cos(\theta) - T \\ -mg\,sin\,(\theta) \end{pmatrix}$$

On utilise la deuxième équation et on applique l'approximation des petits angles :

$$mr\ddot{\theta} = -\,mg\theta$$

On utilise la même forme que dans l'énoncé :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r}\,\theta = 0 \qquad (0{,}5)$$

Ici r = l, soit

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \qquad (0{,}5)$$

8. La solution de l'équation est :

$$\theta(t) = \theta_{max}\cos(\omega t + \phi) \qquad avec \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Donner l'expression de T en fonction de $\boldsymbol{g}$ et $\boldsymbol{l}$. Quelle longueur de fil choisir pour obtenir un pendule qui bat la seconde ? On prendra g = 10 m.s^{-2} afin de simplifier les calculs. (1pt)

$$\omega^2 = \frac{g}{l} = \frac{4\pi^2}{{T_p}^2} \qquad (0,5)$$

$$l = \frac{g{T_p}^2}{4\pi^2} = \frac{10 \times 4}{4 \times 10} = 1\ m \qquad (0,5)$$