Corrigé + barème.

NOM.. PRENOM.. GROUPE ....

Contrôle de Physique

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés. Le barème est donné à titre indicatif.

Réponses exclusivement sur le sujet. Si vous manquez de place, vous pouvez utiliser le verso des pages.

Exercice 1. Questions de cours [2.5 POINTS](3 points – pas de points négatifs)

Choisissez la bonne réponse

1. Un mouvement est dit uniforme si

   a. Sa trajectoire est une ligne droite.

   b. Son accélération est constante au cours du temps.

   c. Sa vitesse est constante au cours du temps.

   d. Sa vitesse et son accélération varient très peu avec le temps.

2. En coordonnées polaires ($\overrightarrow{u}_\rho$, $\overrightarrow{u}_\theta$), le vecteur position est donné par

   a. $\vec{r}(t) = \rho\overrightarrow{u}_\rho + \theta\overrightarrow{u}_\theta$

   c. $\vec{r}(t) = \theta\overrightarrow{u}_\rho + \rho\overrightarrow{u}_\theta$

   b. $\vec{r}(t) = \rho\overrightarrow{u}_\rho$

   d. $\vec{r}(t) = \rho\overrightarrow{u}_\theta$

3. Un mobile décrit un trajet rectiligne le long de l'axe (Ox). Son équation horaire s'écrit $x(t) = 10 - 2t^2$.

   a. Le mouvement est uniforme

   b. Le mouvement est uniformément circulaire

   c. Le mouvement est décéléré

   d. La norme de l'accélération est de $2\ m/s^2$

4. Considérons un mobile dont la position à chaque instant est donné par son vecteur position $\vec{r}(t)$. L'accélération de ce mouvement est donné par

   a. $\overrightarrow{a}(t) = \dfrac{\partial\vec{r}(t)}{dt^2}$

   c. $\overrightarrow{a}(t) = \left[\dfrac{\partial\vec{r}(t)}{dt}\right]^2$

   b. $\overrightarrow{a}(t) = \dfrac{\partial^2\vec{r}(t)}{dt^2}$

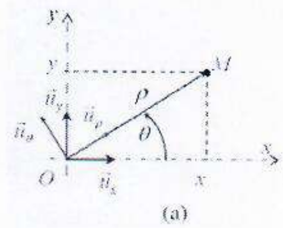
   d. $a(t) = \sqrt{r}(t)$

5. Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

   a. VRAI

   b. FAUX

EXERCICE 2 : COORDONNES CARTESIENNES ET POLAIRES [8 POINTS]



Le schéma ci-contre représente, sur le même plan, les coordonnées polaires ainsi que les coordonnées cartésiennes.

1. Exprimer les vecteurs unitaires $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$ de la base polaire en fonction des vecteurs unitaires $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ de la base cartésienne.

0,5 $\vec{u}_\rho = \cos(\theta)\vec{u}_x + \sin(\theta)\vec{u}_y$

0,5 $\vec{u}_\theta = -\sin(\theta)\vec{u}_x + \cos(\theta)\vec{u}_y.$

2. a. Calculer $\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}$, la dérivée du vecteur unitaire $\vec{u}_\rho$ par rapport à l'angle θ.

1 $\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = -\sin(\theta)\vec{u}_x + \cos(\theta)\vec{u}_y.$

b. Exprimer $\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}$ en fonction de $\vec{u}_\theta$

$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \vec{u}_\theta$ 0,5

3. a. Calculer $\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}$, la dérivée du vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$ par rapport à l'angle θ.

$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\cos(\theta)\vec{u}_x - \sin\theta\,\vec{u}_y$ = -1.

b. Exprimer $\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}$ en fonction de $\vec{u}_\rho$

$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\vec{u}_\rho.$ 0,5

4. Le point M représente la position d'un mobile se déplaçant au cours du temps. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base cartésienne ainsi que dans la base polaire.

$$\overrightarrow{OM}(t) = x\,\vec{u}_x + y\,\vec{u}_y + z\,\vec{u}_z \quad 1$$

polaré

$$\overrightarrow{OM}(t) = \rho\,\vec{u}_\rho \quad 1$$

5. Ecrire l'expression générale du vecteur vitesse et donner son expression dans la base polaire en expliquant chaque étape de calcul.

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$ déf d'une vitesse instantanée

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\rho\,\vec{u}_\rho\right).$$

$$= \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\,\frac{d\vec{u}_\rho}{dt}$$ (dérivée d'un produit).

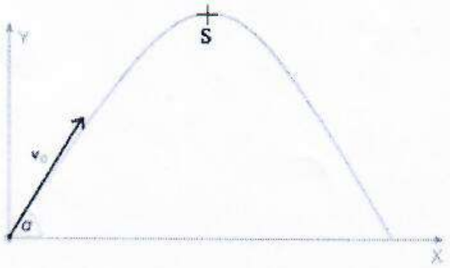
2

$$= \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\left(\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right).$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta\,.$$

EXERCICE 3 : MOUVEMENT D'UN PROJECTILE [5,5 POINTS]

On considère un projectile lancé à partir du point (0;0) du repère cartésien à l'instant $t = 0$ s. Il est lancé en faisant un angle α avec l'horizontale. Le projet passe par le point S qui correspond au sommet de la trajectoire.



Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ vaut :

$$\overrightarrow{OM} = (\ v_0\cos\alpha)\ .\ t\ \ \vec{u}_x + \left[(\ v_0\sin\alpha\ )\ .\ t - 5t^2\right]\vec{u}_y$$

1. a. Donner les équations horaires, x(t) et y(t), de ce mouvement.

0,5 $x(t) = v_0 \cos(\alpha)\, t$. (1)

0,5 $y(t) = (v_0 \sin\alpha)\, t - 5t^2$. (2)

b. Donner l'équation de la trajectoire du point M (x,y).

(1) $\Rightarrow t = \dfrac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$ 0,5

dans (2) $\Rightarrow y(x) = v_0 \sin(\alpha) \dfrac{x}{v_0 \cos(\alpha)} - 5 \cdot \dfrac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)}$

$y(x) = \left(\dfrac{-5}{v_0^2 \cos^2\alpha}\right) x^2 + \tan(\alpha) . x$.

0,5

2. Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$. Exprimer sa norme.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

$$= \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y.$$

1

$$\vec{v}(t) = v_0\cos(\alpha)\vec{u}_x + (v_0\sin(\alpha) - 10t)\vec{u}_y.$$

Norme : $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$

1

$$= \sqrt{v_0^2\cos^2(\alpha) + (v_0\sin(\alpha) - 10t)^2}$$

3. Au sommet de la trajectoire, V_y (la composante suivant l'axe Y du vecteur vitesse) est nulle. Calculer la hauteur maximale atteinte par le projectile en fonction de V_0 et de l'angle α.

Au sommet :

$$v_y = 0 \Rightarrow v_0\sin(\alpha) - 10t = 0.$$

$$\boxed{t = \frac{v_0\sin(\alpha)}{10}.}$$

0,5

on remplace dans $y(t)$.

$$y_{max} = -5\frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{100} + v_0\sin(\alpha)\frac{v_0\sin(\alpha)}{10}.$$

1

$$\boxed{y_{max} = -\frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{20} + \frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{10} = \frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{20}.}$$

EXERCICE 4 : ACCÉLÉRATION EN COORDONNÉES POLAIRES [4 POINTS]

Pour un mouvement quelconque, l'expression de l'accélération en coordonnées polaires est donnée par :

$$\vec{a}(t) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\vec{u}_\theta$$

1. Quelle est l'expression de l'accélération si le mouvement est circulaire ? Justifier.

mvt circulaire $\Rightarrow$ rayon = cste = ρ 0,5

$\Rightarrow \dot{\rho} = 0$ et $\ddot{\rho} = 0$.

0,5 $\vec{a}(t) = (-R\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (R\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$.

1 $a = \sqrt{(R\dot{\theta}^2)^2 + (R\ddot{\theta})^2}$.

2. Quelle est l'expression de l'accélération si le mouvement est, en plus d'être circulaire, aussi uniforme. Justifier.

0,5 mvt circulaire unif $\dot{\theta} = cste \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

$\vec{a} = (-R\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho$ 0,5

1 $a = (\rho\dot{\theta}^2)$