EPITA / S2 Corrigé + Barème **Mars 2020**

NOM : .... PRENOM :..GROUPE :.........

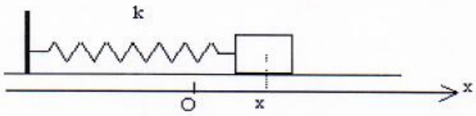
Contrôle 2 de Physique

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.

Réponses exclusivement sur le sujet

Q.C.M (4 points, sans points négatifs) **« Le sujet est noté sur 21 »**

1- On considère une masse m accrochée à un ressort de coefficient de raideur k, qui subit une force de frottement d'expression $\vec{f} = -\alpha.\vec{v}$, la constante α représente le coefficient de frottement (positif) et $\vec{v}$ le vecteur vitesse. La position d'équilibre de la masse est au point O.



(0,5 par question)

L'équation différentielle du mouvement s'écrit

a) $\ddot{x}+\alpha\dot{x}+\frac{k}{m}x=0$ b) $\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$ c) $\ddot{x}+\frac{\alpha}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0$ d) $\ddot{x}+\frac{k}{m}\dot{x}+\alpha.x=0$

2- La résolution de l'équation différentielle (question 1) permet de distinguer trois régimes de l'oscillateur amorti. Le régime pseudopériodique correspond à une condition sur le coefficient de frottement α donnée par :

a) $\alpha < 2m\omega_0$ b) $\alpha = 0$ c) $\alpha > 2m\omega_0$

(ω_0 étant la pulsation propre de l'oscillateur sans frottement)

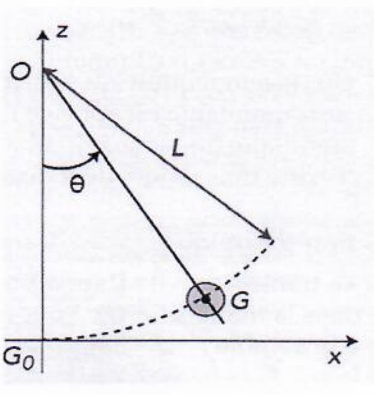
3- Dans le cas du régime pseudopériodique, la pulsation ω de l'oscillateur amorti vérifie :

a) $\omega = \omega_0$ b) $\omega > \omega_0$ c) $\omega < \omega_0$

4- L'équation horaire du mouvement du régime pseudopériodique de l'oscillateur amorti (question 1) s'écrit

a) $x(t) = x_0\cos(\omega t)$ b) $x(t) = x_0 e^{\frac{\alpha}{2m}t}\cos(\omega t)$ c) $x(t) = x_0\, e^{-\frac{\alpha}{2m}t}\cos(\omega t)$

5- Dans le cas des petites oscillations, l'équation différentielle en l'absence des frottements, du pendule simple, représenté sur le schéma ci-dessous donne



a) $\ddot{\theta}+\frac{L}{g}\theta=0$ b) $\ddot{\theta}+\frac{g}{L}\theta=0$ c) $\ddot{\theta}+\frac{m}{L}\theta=0$ d) $\ddot{\theta}+\frac{m}{g.L}\theta=0$

A. Zellagui

6- On considère le pendule simple sans frottement (question 5) dont la période T des oscillations dépend de la longueur du fil L. Dans le cas du même pendule mais maintenant avec un fil de longueur 2L, que vaut la période T' ?

a) $T' = 2T$ b) $T' = 4T$ c) $T' = T/2$ d) $T' = \sqrt{2}.T$

7- Supposons que l'on néglige tout phénomène de convection, et en se limitant à un modèle conductif, comment s'écrit la résistance d'un conducteur de conductivité thermique λ_{th}, de section S et d'épaisseur e?

a) $R_{th} = \frac{e.S}{\lambda_{th}}$ b) $R_{th} = \frac{e}{\lambda_{th} S}$ c) $R_{th} = \frac{\lambda_{th}}{e.S}$

8- On considère le conducteur de la question 7, la conductivité thermique s'exprime en

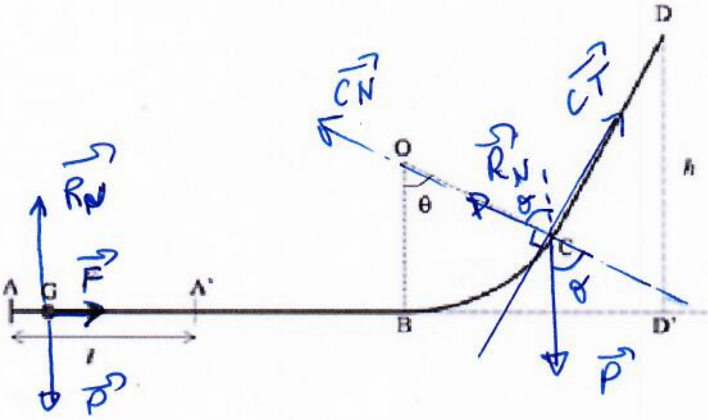
a) KW^{-1} b) Wm^{-2} c) $KW^{-1}m^{-2}$ d) $WK^{-1}m^{-1}$

Exercice 1 (6 points)

Un joueur dispose d'une piste sur laquelle il propulse puis abandonne un palet de masse m. La piste située dans un plan vertical est formée d'une partie rectiligne horizontale (AB) raccordée tangentiellement à un arc de cercle (BC), raccordé lui-même à une partie rectiligne inclinée (CD). Le schéma ci-dessous représente la trajectoire suivie par le centre d'inertie G du palet. L'épreuve est réussie **si G parvient en D**, à une hauteur h au-dessus du plan horizontal qui contient AB. Les frottements sont négligés.

Une force de propulsion $\vec{F}$, constante, est exercée sur le palet le long du trajet AA' de **longueur l,** cette force cesse en A'.

0,5



Données :

$l = 0{,}5m$, $h = 1{,}5m$, $m = 5kg$, $g = 10ms^{-2}$; On pose : OC = OB = R

1-Représenter les forces extérieures appliquées sur le palet entre A et A'.

2- Utiliser le théorème d'énergie cinétique entre A et A' pour en déduire la vitesse du palet au point A', sachant que **la vitesse au point A est nulle**. Donner l'expression littérale en fonction de l, F et m.

2) $\Delta E_{c\,A\to A'} = \underbrace{W(\vec{R_N})}_{0\ (\vec{R_N}\perp\vec{AA'})} + \underbrace{W(\vec{P})}_{0\ (\vec{P}\perp\vec{AA'})} + W(\vec{F}) = \int_A^{A'} \vec{F}.\vec{dl}$

$\frac{1}{2} m v_{A'}^2 - 0 = \int_A^{A'} F\,dl\cos(0°) = F.\int_A^{A'} dl = F.AA' = F.l$

$\boxed{v_{A'} = \sqrt{\frac{2F.l}{m}}}$

1

3- Quelle est la relation entre la vitesse au point B et celle au point A'. Justifier votre réponse.

on a $v_B = v_{A'}$ car $\sum W(\vec{F}_{ext}) = 0$, sachant que les seules forces appliquées sont $\vec{R_N}$ et $\vec{P}$

$W(\vec{R_N}) = 0$, $W(\vec{P}) = 0 \Rightarrow \Delta E_{c\,A' \to B} = 0$

$\boxed{v_{A'} = v_B}$. 0,5

4- a) Déterminer, en utilisant le théorème de l'énergie mécanique, l'expression de la vitesse au point B, en fonction de **g, h**, pour que le palet atteigne **le point D avec une vitesse nulle.**

$\Delta E_{c\,B \to D} = -\Delta E_{p\,B \to D}$ car $\Delta E_m = W(\vec{f}_{frott}) = 0$

$E_{m_B} = E_{m_D}$ $\quad \frac{1}{2} m v_B^2 + m g \underbrace{z_B}_{=0} = \frac{1}{2} m \underbrace{v_D^2}_{=0} + m g h$

$\boxed{v_B = \sqrt{2gh}}$

1

b- En déduire la norme de la force $\vec{F}$ exercée entre A et A'. Faire l'application numérique.

$v_B = v_{A'} = \sqrt{2gh} = \sqrt{\frac{2F.l}{m}}$

$gh = \frac{F.l}{m}$ d'où $F = \frac{mgh}{l}$

1 A.N : $\boxed{F = \frac{5 \times 10 \times 0,5}{0,5} = 150\ N}$.

5- a) Utiliser le théorème d'énergie mécanique entre B et C, pour exprimer la vitesse au point C, en fonction de **g, h, R et θ.**

b) En déduire l'expression de la norme de la réaction $\overrightarrow{R_N}$ de la piste au point C, en fonction de **m, g, h, R et θ**. Pour ce faire , il vous faut utiliser la deuxième loi de Newton dans la base de Frenet, représentée au point C.

a) $E_{m_B} = E_{m_C}$ (car pas de frotts).

$\frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} m v_C^2 + m g z_C$ avec $z_C = R - R\cos(\theta)$

projection sur l'axe $\vec{Gx}$.

1

$\underbrace{f}_{} - T = m\, a_x$

$\underbrace{-\alpha \dot{x}}_{>0 \text{ car } \dot{x} < 0} - kx = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx = 0$

$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$

Ce qui donne : $\boxed{\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ " ω_0^2.

3- On se place dans le cas où $\boldsymbol{\alpha < 2m\omega_0}$, tel que ω_0 représente la pulsation propre de l'oscillateur.

a) Qualifier le mouvement, justifier votre réponse

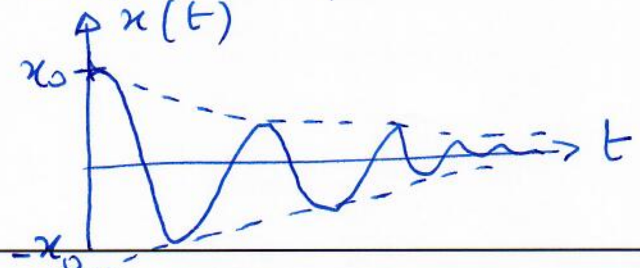
b) Représenter de manière schématique l'évolution temporelle de la position de la masse x(t).

a) l'éq^t caractéristique est $r^2 + \frac{\alpha}{m} r + \omega_0^2 = 0$.

$\Delta = \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 - 4\omega_0^2$; $\Delta < 0 \Rightarrow \alpha < 2m\omega_0$

0,5 solutions complexes conjuguées d'où régime pseudo-périodique.

b)



0,5

c) Exprimer l'énergie mécanique de la masse m à un instant t quelconque, en déduire sa dérivée par rapport au temps : $\frac{dE_m}{dt}$, en fonction de $\dot{x}$ et de $\ddot{x}$.

d) Retrouver, en utilisant l'équation différentielle, la relation $\frac{dE_m}{dt} = \vec{f}.\vec{v}$, $\vec{f}$ étant la force de frottement.

c) $E_m = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = (E_{p_{elast}} + E_c)$.

$\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{2} k.(2x\dot{x}) + \frac{1}{2} m (2\dot{x}\ddot{x})$.

$\frac{dE_m}{dt} = kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x}$ 1,5

$$v_c^2 = \underbrace{v_B^2}_{=\,2gh} - 2gR(1-\cos(\theta))$$

$$v_c = \sqrt{2g(h - R(1-\cos(\theta)))}$$ 1

b) $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$ avec $a_N = \dfrac{v_c^2}{R}$.

projection sur $\vec{MN}$: $R_N - P\cos(\theta) = m\dfrac{v_c^2}{R}$.

$$R_N = mg\cos(\theta) + m\frac{2g}{R}(h - R(1-\cos(\theta))).$$

$$R_N = mg\left(\cos(\theta) + 2g\left(\frac{h}{R} - 1\right) + 2\cos(\theta)\right).$$

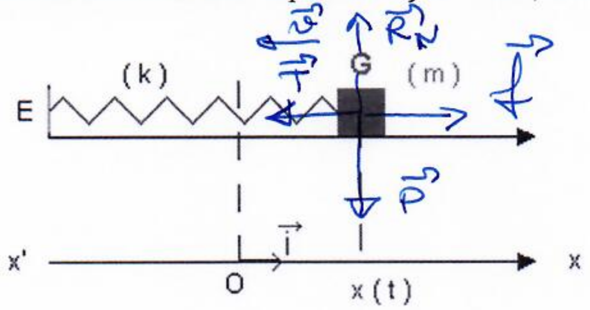
$$\boxed{R_N = mg\left(3\cos(\theta) + 2g\left(\frac{h}{R} - 1\right)\right)}.$$ 1

Exercice 2 ***Les parties A et B sont indépendantes***

Partie A (6 points)

On peut modéliser un oscillateur mécanique horizontal par un système solide-ressort constitué d'un solide de masse m, fixé à l'extrémité d'un ressort, de masse négligeable et de constante de raideur k. La position d'équilibre de la masse assimilée à un point est au point O.

On écarte la masse de sa position d'équilibre, d'une distance x_0 vers la droite, et on la lâche à t = 0 sans vitesse initiale. On note x(t) = OG, la position du solide à un instant t quelconque. Les frottements sont assimilés à une force proportionnelle à la vitesse d'expression $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$, le coefficient α étant une constante positive.



1 1- Représenter les forces extérieures exercées sur la masse m, en considérant le mouvement pendant la phase où la vitesse $\dot{x}$ est négative.

2- Utiliser la deuxième loi de Newton, pour exprimer l'équation différentielle du mouvement.

2) $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$.

$\vec{P} + \vec{R_N} + \vec{f} + \vec{T} = m\vec{a}$

d) $\frac{dE_m}{dt} = \dot{x}(kx + m\ddot{x})$

1,5 or d'après l'éqt diff de la question 2

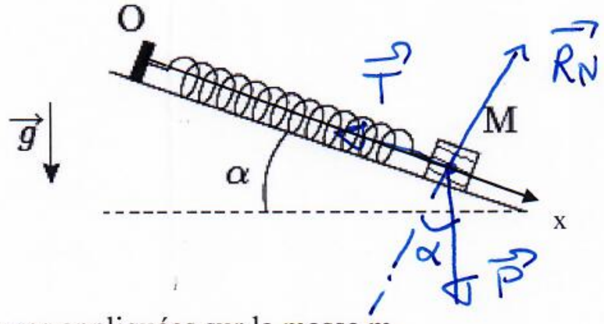
$kx + m\ddot{x} = -\alpha\dot{x}$

ce qui donne $\frac{dE_m}{dt} = \underbrace{(-\alpha\dot{x})}_{f_x}\underbrace{(\dot{x})}_{v_x} = f_x \cdot v_x$

$\frac{dE_m}{dt} = \vec{f}\cdot\vec{v}$ ($\vec{f}$ = force de frotts).

Partie B (5 points)

Un point matériel M de masse m est relié à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide L_0, attaché à un point fixe O. L'ensemble est placé sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. **Les frottements sont négligés**.
On précise que l'angle α se retrouve entre le vecteur poids et la normale au plan incliné.



1 1- Représenter les forces extérieures appliquées sur la masse m.

2- Montrer que la longueur du ressort à l'équilibre (mesurée par rapport au point O) est donnée par :

$$x_e = \frac{mg\sin(\alpha)}{k} + L_0$$

2) à l'équilibre $\vec{P} + \vec{R_N} + \vec{T} = \vec{0}$.

1,5 projection sur $\vec{Ox}$: $mg\sin(\alpha) - T = 0$.

avec $T = k(x_e - L_0)$ x_e est mesurée par rapport au pt O.

$mg\sin(\alpha) = k(x_e - L_0)$

d'où $\boxed{x_e = \frac{mg\sin(\alpha)}{k} + L_0}$

3- On écarte la masse de sa position d'équilibre x_e, vers x > 0 et on la lâche à t = 0 sans vitesse initiale. On note x(t) la position du solide mesurée par rapport au point O.
Montrer, en utilisant la deuxième loi de Newton, que l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$\ddot{X} + \frac{k}{m}X = 0 \; ; \quad \text{On pose : } X(t) = x(t) - x_e$$

Indice : Penser à utiliser l'expression de L_0 établie à la question (2).

3) $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$\vec{P} + \vec{R_N} + \vec{T} = m\vec{a}$

2,5

projection sur l'axe $\vec{Ox}$:

$mg\sin(\alpha) + 0 - k(x - L_0) = m\ddot{x}$

$mg\sin(\alpha) - kx + kL_0 = m\ddot{x}$

or $kL_0 = kx_e - mg\sin(\alpha)$ (d'après la question 2)

$\cancel{mg\sin(\alpha)} - kx + kx_e - \cancel{mg\sin(\alpha)} = m\ddot{x}$

$-k(x - x_e) = m\ddot{x} = m\,\ddot{\overline{(x - x_e)}}$ car $\ddot{x}_e = 0$

$-kX = m\ddot{X}$ ce qui donne bien

$$\boxed{\ddot{X} + \frac{k}{m}X = 0}.$$