S2B3 Correction EV

Exercice 1 : espace vectoriel ?

On munit l'ensemble $\mathbb{R}^2$ *de l'opération interne* $+$ *et de l'opération externe* $*$ *suivantes :*

Pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$u + v = (x + x', y + y'),\ \alpha * u = (\alpha x, \alpha^{-1} y) \text{ si } \alpha \neq 0 \text{ et } 0 * u = (0, 0)$$

1. *Soient* $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ *non nul. Montrer que* $\alpha * u = 0_{\mathbb{R}^2} \iff u = 0_{\mathbb{R}^2}$.

   Soient $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

   • Supposons que $\alpha * u = 0_{\mathbb{R}^2}$. Alors, $(\alpha x, \alpha^{-1} y) = (0, 0)$. Ainsi, $\alpha x = 0$ et $\alpha^{-1} y = 0$. Or $\alpha \neq 0$ et $\alpha^{-1} \neq 0$, d'où $x = y = 0$. Donc $u = 0_{\mathbb{R}^2}$.

   • Supposons que $u = 0_{\mathbb{R}^2}$. Alors, $\alpha * u = (\alpha \times 0, \alpha^{-1} \times 0) = (0, 0) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

2. *Soient* $u = (-1, 30)$ *et* $v = (2, -7)$ *deux éléments de* $\mathbb{R}^2$*. Faire les calculs suivants (compléter les pointillés) :*

   (a) $u + v = (1, 23)$
   (b) $1 * u = (-1, 30)$
   (c) $2 * u = (-2, 15)$
   (d) $3 * u = (-3, 10)$
   (e) $5 * u = (-5, 6)$

3. *Muni de ces deux opérations,* $\mathbb{R}^2$ *est-il un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel ? Justifier.*

   Soit $u = (-1, 30)$. On remarque que $2 * u + 3 * u = (-5, 25) \neq 5 * u$. Ainsi, $5 * u = (2 + 3) * u \neq 2 * u + 3 * u$. La propriété de distributivité « $\forall u \in E$ et $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u$ » des espaces vectoriels n'est donc pas vérifiée. Donc, muni de $+$ et $*$, $\mathbb{R}^2$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 2 : sous-espaces vectoriels

1. *Soient* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et* F *un ensemble. Donner TOUTES les conditions mathématiques pour avoir : « F est un sous-espace vectoriel de E »*

   F est un sev de E si et seulement si
   - $F \subset E$
   - $0_E \in F$
   - $\forall (u, v) \in F^2$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha u + v \in F$

2. *Dire si les ensembles suivants sont des* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels. Justifiez rigoureusement votre réponse.*

   (a) $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y = 0 \text{ et } x - z^2 = 0\right\}$

   Prenons, $u = (4, 4, 2)$ et $v = (4, 4, -2)$. $u \in F$ et $v \in F$. Or $u + v = (8, 8, 0) \notin F$ car $8 \neq 0^2$. Donc F n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(b) $G = \{P \in \mathbb{R}[X],\, P(1) + P'(1) = 0\}$

- De par sa définition, $G \subset \mathbb{R}[X]$. De plus, $0'_{\mathbb{R}[X]}(1) + 0_{\mathbb{R}[X]}(1) = 0 + 0 = 0$. D'où, $0_{\mathbb{R}[X]} \in G$.

- Soient $(P, Q) \in G^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{rcl}(\alpha P + Q)'(1) + (\alpha P + Q)(1) & = & (\alpha P' + Q')(1) + (\alpha P + Q)(1) \\ & = & \alpha P'(1) + Q'(1) + \alpha P(1) + Q(1) \\ & = & \alpha\left(P'(1) + P(1)\right) + \left(Q'(1) + Q(1)\right) \\ & = & \alpha 0 + 0 \text{ car } P \in G \text{ et } Q \in G \\ & = & 0\end{array}$$

Donc $\alpha P + Q \in G$.

- On a démontré que G est un sev de $\mathbb{R}[X]$. G est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 3 : cours sur les sev

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. *Compléter les pointillés par « Vrai » ou « Faux ».*

   - $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E : VRAI
   - $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E : FAUX
   - $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E : VRAI

2. *Justifier votre réponse pour $F \cap G$ (si vous avez répondu « Vrai », faire une preuve, sinon donner un contre-exemple).*

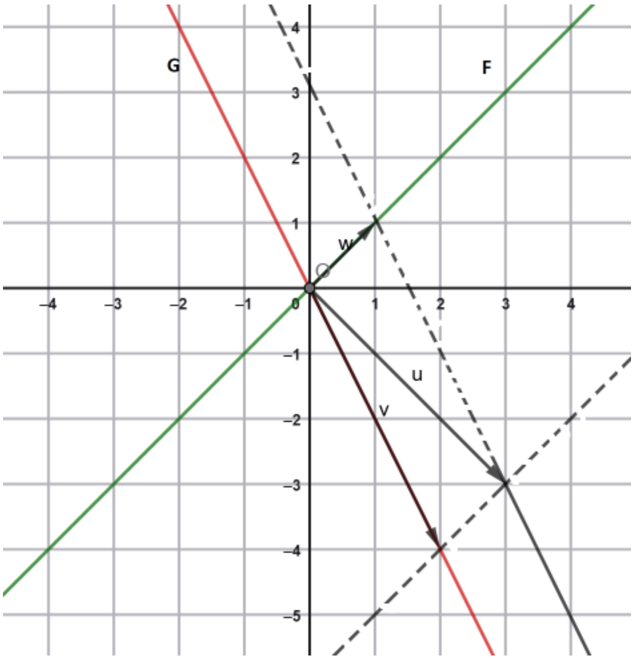
   - $F \subset E$ et $G \subset E$ d'où $F \cap G \subset E$.
   - $0_E \in F$ car F sev de E et $0_E \in G$ car G sev de E. Donc $0_E \in F \cap G$.
   - Soient $(u, v) \in (F \cap G)^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   On a alors $(u, v) \in F^2$ et $(u, v) \in G^2$. Or F est un sev de E, d'où $\alpha u + v \in F$. De même G étant un sev de E, $\alpha u + v \in G$. Ainsi, $\alpha u + v \in F \cap G$.

   $F \cap G$ est donc un sev de E.

3. *Donner la définition mathématique de $F + G$:* $F + G = \{u \in E,\, \exists\, (v, w) \in F \times G,\, u = v + w\}$.

   Dans le quadrillage ci-dessous sont représentés deux sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^2$. Dessiner le vecteur $u = (3, -3)$ et trouver graphiquement la décomposition de u dans $F + G$. Vous ferez apparaitre les traits de construction.



Graphiquement, j'ai trouvé $u = v + w$ avec $v = (1,1) \in F$ et $w = (2,-4) \in G$. Au passage, on a bien $v + w = (1,1) + (2,-4) = (3,-3) = u$!

Exercice 4 : somme de sous-espaces vectoriels

Dans $E = \mathbb{R}^3$*, on considère les deux sev* $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - z = 0\right\}$ *et* $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + z = 0\right\}$

1. *Géométriquement, que représentent* F *et* G *?*

   Ce sont deux plans de $\mathbb{R}^3$.

2. *Soit* $u = (x,y,z) \in E$.

   (a) *Soient* $v = (0, x+z, x+z)$ et $w = (x, -x+y-z, -x)$. *Montrer que* $v \in F$ *et* $w \in G$.

   - $0 + (x+z) - (x+z) = 0$. Donc $v \in F$.
   - $x + (-x) = 0$. Donc, $w \in G$.

   (b) *A-t-on* $E = F + G$ *? Justifier.*

   - $v + w = (x, x+z-x+y-z, x+z-x) = (x,y,z) = u$.
   - Soit $u = (x,y,z) \in E$. On a vu que $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$. Ainsi, $u \in F + G$. On a donc $E \subset F + G$. Or $F + G \subset E$ de par sa définition. Donc, $E = F + G$.

3. *Donner la définition mathématique de* $E = F \oplus G$.

$$E = F \oplus G \iff F \cap G = \{0_E\} \text{ et } E = F + G.$$

4. *A-t-on ici* $E = F \oplus G$ *? Justifier.*

   Le vecteur $X = (-1,2,1)$ est dans F car $-1+2-1 = 0$. Il est aussi dans G car $-1+1 = 0$. Donc $X \in F \cap G$. Ainsi, $F \cap G \neq \{0_E\}$. Donc, $E \neq F \oplus G$.

Exercice 5 : cours 2 sur les familles

1. *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de E ($n \in \mathbb{N}^*$).*

   (a) *Donner la définition mathématique (avec les quantificateurs) de « $\mathcal{F}$ est une famille libre de E ».*

   $\forall\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = 0_E \implies \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0)$

   (b) *Donner la définition mathématique (avec les quantificateurs) de « $\mathcal{F}$ est une famille liée de E ».*

   $\exists\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ non tous nuls tel que $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = 0_E$

   (c) *Donner la définition mathématique (avec les quantificateurs) de « $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E ».*

   $\forall\, u \in E$, $\exists\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$.

   (d) *Écrire Vect($\mathcal{F}$) sous la forme d'un ensemble.*

   $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \{\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n,\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n\}$

2. Dans $E = \mathbb{R}[X]$, la famille $\mathcal{F} = \big(0_{\mathbb{R}[X]}, X - 1, X^2 + 3\big)$ est-elle libre ou liée ? Justifier.

   $46.0_{\mathbb{R}[X]} + 0.(X - 1) + 0.(X^2 + 3) = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

   On a trouvé $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (46, 0, 0)$ réels non tous nuls tels que $\alpha_1 0_{\mathbb{R}[X]} + \alpha_2(X - 1) + \alpha_3(X^2 + 3) = 0_{\mathbb{R}[X]}$.
   La famille est donc liée.