

S2 B3 Correction APEF

Exercice 1 : polynômes

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $A(X) = X^4 + 2X^2 + 8X + 5$.

(a) Montrer que -1 est une racine de A . Trouver $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $(X + 1)^\alpha$ divise A et $(X + 1)^{\alpha+1}$ ne divise pas A .

• $A(-1) = 1 + 2 - 8 + 5 = 0$ donc -1 est une racine de A .

• $A'(X) = 4X^3 + 4X + 8$ et $A''(X) = 12X^2 + 4$. D'où, $A'(-1) = -4 - 4 + 8 = 0$ et $A''(-1) = 12 + 4 = 16 \neq 0$.

Ainsi, -1 est une racine d'ordre exactement 2 de A ce qui signifie que $(X + 1)^2 \mid A$ et $(X + 1)^3$ ne divise pas A .

(b) Après avoir effectué la division euclidienne de A par $(X + 1)^\alpha$, écrire A comme produit de polynômes irréductibles d'une part dans $\mathbb{R}[X]$, d'autre part dans $\mathbb{C}[X]$.

On trouve $A(X) = (X + 1)^2(X^2 - 2X + 5) + 0$ en posant la division euclidienne.

Le discriminant de $X^2 - 2X + 5$ est égal à $-16 < 0$. Ce polynôme est donc irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Ainsi, dans $\mathbb{R}[X]$, $A(X) = (X + 1)^2(X^2 - 2X + 5)$.

Dans $\mathbb{C}[X]$, on a $A(X) = (X + 1)^2(X - 1 - 2i)(X - 1 + 2i)$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré 3 vérifiant $(X - 1)^2 \mid (P(X) + 1)$ et $X^2 \mid (P(X) - 1)$.

(a) Que signifie les deux affirmations précédentes ? En déduire que $P(1) = -1$ et $P(0) = 1$.

De l'énoncé : $\exists (Q_1, Q_2) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que $P(X) + 1 = (X - 1)^2 Q_1(X)$ et $P(X) - 1 = X^2 Q_2(X)$.

Ainsi, $P(1) + 1 = 0$ (en remplaçant X par 1 dans la première expression) et $P(0) - 1 = 0$ (X par 0 dans la seconde expression). Donc, $P(1) = -1$ et $P(0) = 1$.

(b) Expliquer pourquoi $X \mid P'$ et $(X - 1) \mid P'$. En déduire que $X(X - 1) \mid P'$.

1 est une racine d'ordre 2 de $P(X) + 1$. Ainsi, 1 est aussi une racine de son polynôme dérivé qui est $P'(X)$. Donc $P'(1) = 0$, ce qui signifie que $(X - 1) \mid P'$.

De même, comme la dérivée de $P(X) - 1$ est $P'(X)$, 0 annule $P'(X)$. D'où, $X \mid P'$.

0 et 1 étant deux racines distinctes de P' , on a donc $X(X - 1) \mid P'$.

(c) De ce qui précède, en déduire que $P'(X) = aX^2 - aX$ avec $a \in \mathbb{R}$.

De ce qui précède, on en déduit qu'il existe $Q_3 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P'(X) = X(X - 1)Q_3(X)$.

Or $\deg(P) = 3 \implies \deg(P') = 2 \implies \deg(Q_3) = 0$. Ainsi, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $Q_3(X) = a$. Donc $P'(X) = aX(X - 1) = aX^2 - aX$.

(d) En déduire : $\exists b \in \mathbb{R}$ tel que $P(X) = a\frac{X^3}{3} - a\frac{X^2}{2} + b$. En utilisant la question 2.(a), trouver a et b .

De la question précédente, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $P(X) = a\frac{X^3}{3} - a\frac{X^2}{2} + b$. Or $P(0) = 1$ d'où $b = 1$. De plus, $P(1) = -1$ d'où $\frac{a}{3} - \frac{a}{2} + 1 = -1$. Cela donne $a = 12$.

En conclusion : $P(X) = \frac{12X^3}{3} - \frac{12X^2}{2} + 1 = 4X^3 - 6X^2 + 1$.

Exercice 2 : équations différentielles

Les questions sont indépendantes.

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle (E) : $\frac{1}{2}y'' - y' + 5y = -\pi$.

• L'équation caractéristique associée est (C) : $\frac{1}{2}r^2 - r + 5 = 0$. On a $\Delta = 1 - 10 = -9$. Ainsi, les racines de (C) sont : $r_1 = 1 + 3i$ et $r_2 = 1 - 3i$.

• $y_p : x \mapsto -\frac{\pi}{5}$ est une solution particulière évidente de (E).

• En conclusion : $S = \left\{ y : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto e^x (k_1 \cos(3x) + k_2 \sin(3x)) - \frac{\pi}{5} \end{cases} ; (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

2. Résoudre, sur $I =]-1, +\infty[$, (E) : $(x+1)y' - 2y = (x+1)^3 \cos(3x)$.

• Résolution de l'équation homogène : (E₀) : $(x+1)y' - 2y = 0$.

On a $y_0(x) = ke^{-\int \frac{-2}{x+1} dx} = ke^{2 \ln|x+1|} = k(x+1)^2$ avec $k \in \mathbb{R}$.

• On cherche une solution particulière de (E) de la forme $y_p : x \mapsto k(x)(x+1)^2$ (variation de la constante).

On a $y'_p(x) = k'(x)(x+1)^2 + 2k(x)(x+1)$. Ainsi, y_p est une solution de (E) ssi

$$(x+1)y'_p(x) - 2y_p(x) = (x+1)^3 \cos(3x) \iff (x+1)^3 k'(x) + 2k(x)(x+1)^2 - 2k(x)(x+1)^2 = (x+1)^3 \cos(3x)$$

D'où, $k'(x) = \cos(3x)$. Prenons $k(x) = \frac{\sin(3x)}{3}$. On en déduit que $y_p(x) = (x+1)^2 \times \frac{\sin(3x)}{3}$.

• En conclusion : $S = \left\{ y : \begin{cases}]-1, +\infty[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto k(x+1)^2 + (x+1)^2 \times \frac{\sin(3x)}{3} \end{cases} ; k \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice 3 : étude locale de fonctions

Les questions sont indépendantes.

1. Soient $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 et ne s'y annulant pas. Donner deux définitions mathématiques de chacune des notations suivantes : $f = o(g)$ et $f \sim g$ au voisinage de x_0 .

$$- f \sim g \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \iff \text{au voisinage de } x_0, f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x)) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

$$- f = o(g) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \iff \text{au voisinage de } x_0, f(x) = g(x)\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

2. La notation $f(x) = o(g(x))$ peut s'écrire aussi $f(x) \ll g(x)$.

Dans les cas suivants, compléter les pointillés par un des symboles \ll , \gg ou \sim .

$$\text{Au voisinage de } 0 : \quad 2x^2 \cdots \cdots x, \quad (x^3 - 3x^2 + x) \cdots \cdots x \quad \text{et} \quad (x^3 - 3x^2 + x) \cdots \cdots x^3$$

$$2x^2 \ll x, \quad (x^3 - 3x^2 + x) \sim x \quad \text{et} \quad (x^3 - 3x^2 + x) \gg x^3$$

$$\text{Au voisinage de } +\infty : \quad 2x^2 \cdots \cdots x, \quad (x^3 - 3x^2 + x) \cdots \cdots x \quad \text{et} \quad (x^3 - 3x^2 + x) \cdots \cdots x^3$$

$$2x^2 \gg x, \quad (x^3 - 3x^2 + x) \gg x \quad \text{et} \quad (x^3 - 3x^2 + x) \sim x^3$$

3. Soient f et g deux fonctions telles qu'au voisinage de 0 :

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \text{ et } g(x) = -1 + x + 3x^2 - x^3 + o(x^3)$$

(a) Donner un équivalent (le plus simple possible !) en 0 de $f(x)$. Justifier brièvement en repartant de la définition.

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0 \iff \frac{f(x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + x\varepsilon(x).$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. Donc en 0, $f(x) \sim x$.

(b) Donner un équivalent (autre que la fonction elle même) en 0 de :

- $g(x) + 1 : \dots\dots\dots g(x) + 1 \sim x$

- $h(x) = \sin(x) \times f(x) \times (g(x) + 1) : \dots\dots\dots h(x) \sim x \times x \times x$ donc $h(x) \sim x^3$.

(c) A-t-on assez d'informations pour donner le développement limité en 0 de $f(x)+g(x)$ à l'ordre 1 ? À l'ordre 2 ? À l'ordre 3 ? Donner le développement limité à l'ordre indiqué quand la réponse est oui.

- Ordre 1. $f(x) + g(x) = x + o(x) - 1 + x + o(x) = -1 + 2x + o(x)$.
- Ordre 2. $f(x) + g(x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 + x + 3x^2 + o(x^2) = -1 + 2x + \frac{5x^2}{2} + o(x^2)$.
- Ordre 3. On ne connaît pas le DL à l'ordre 3 de f . On ne peut donc pas donner le DL à l'ordre 3 de $f(x) + g(x)$.

Exercice 4 : développements limités

Dans cet exercice, vous prendrez soin de rappeler les développements limités usuels que vous utiliserez.

1. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $f(x) = \cos(x)e^{-2x}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \times \left(1 - 2x + \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3!} + o(x^3)\right) \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \times \left(1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right) \\ &= 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x^3 + o(x^3) \\ &= 1 - 2x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

2. (a) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$g(x) = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2}x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)$$

(b) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $h(x) = \ln(1+g(x))$.

$$\begin{aligned}
h(x) &= \ln\left(2 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)\right) \\
&= \ln\left(2\left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{3x^4}{16} + o(x^4)\right)\right) \\
&= \ln(2) + \ln\left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{3x^4}{16} + o(x^4)\right) \\
&= \ln(2) - \frac{x^2}{4} + \frac{3x^4}{16} - \frac{x^4}{32} + o(x^4) \text{ en posant } u = -\frac{x^2}{4} + \frac{3x^4}{16} + o(x^4) \rightarrow 0 \text{ et } u^2 = \frac{x^4}{16} + o(x^4) \\
&= \ln(2) - \frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{32} + o(x^4)
\end{aligned}$$

Exercice 5 : calcul de limites

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + x + \ln(1-x) + \cos(x)}{1 - (1-x)^\pi}$. *Vous prendrez soin de votre rédaction.*

- $N(x) = -1 + x + \ln(1-x) + \cos(x) = -1 + x - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = -x^2 + o(x^2)$.

Ainsi, en 0, $N(x) \sim -x^2$.

- $D(x) = 1 - (1-x)^\pi = 1 - (1 - \pi x + o(x)) = \pi x + o(x)$. Ainsi, en 0, $D(x) \sim \pi x$.

- On en déduit que $\frac{N(x)}{D(x)} \sim \frac{-x^2}{\pi x} = -\frac{x}{\pi}$. Or $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x}{\pi} = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{N(x)}{D(x)} = 0$.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x$. *Vous prendrez soin de votre rédaction.*

$$\left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = e^{x\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = e^{1 + o(1)}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x = e^1$

Autre façon de rédiger cette question :

On pose $X = \frac{1}{x}$. Quand x tend vers $+\infty$, X tend vers 0. On est ramené à calculer : $\lim_{X \rightarrow 0} (1 + \sin(X))^{\frac{1}{X}}$.

$$(1 + \sin(X))^{\frac{1}{X}} = e^{\frac{1}{X} \times \ln(1 + \sin(X))} = e^{\frac{1}{X} \ln(1 + X + o(X))} = e^{\frac{1}{X} \times (X + o(X))} = e^{1 + o(1)}.$$

Donc, $\lim_{X \rightarrow 0} (1 + \sin(X))^{\frac{1}{X}} = e^1$