EPITA

Mathématiques

Examen S2-B3-EV

Espaces vectoriels

durée : 1 heure

Mars 2025

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 20 points.

Consignes :

— Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 4 exercices.**
— **La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
— Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.
— Documents et calculatrices interdits.
— Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.
— Dans le sujet, *sev* signifie *sous-espace vectoriel* et deg signifie *degré*.

Exercice 1 : sous-espaces vectoriels (6 points)

1. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F un ensemble. Donner les conditions mathématiques pour avoir : « F est un sous-espace vectoriel de E »

   ....
   ....

2. Dire si les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Justifiez rigoureusement votre réponse.

   (a) $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\, 2x + y = 0\right\}$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (b) $G = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\, f(0) \times f(1) = 0\right\}$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Exercice 2 : cours 1 sur les sev (3 points)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Compléter les pointillés par « Vrai » ou « Faux ».

   - $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E : ....
   - $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E : ....
   - $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E : ....

2. Justifier votre réponse pour $F \cap G$ (si vous avez répondu « Vrai », faire une preuve, sinon donner un contre-exemple).

Exercice 3 : somme de sous-espaces vectoriels (7 points)

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère les deux sev $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y = 0\}$

1. Géométriquement, que représentent F et G ?

   ....

2. Soit $u = (x, y, z) \in E$.

   (a) Soient $v = (y, 2y - x, x - 3y)$ et $w = (x - y, -y + x, z + 3y - x)$. Montrer que $v \in F$ et $w \in G$.

   ....

   (b) En déduire que $u \in F + G$.

   ....

   (c) A-t-on $E = F + G$? Justifier.

   ....

3. Donner la définition de $E = F \oplus G$.

   ....

4. A-t-on ici $E = F \oplus G$? Justifier.

   ....

Exercice 4 : cours 2 sur les familles (4 points)

1. Dans $E = \mathbb{R}_2[X] = \{P \in \mathbb{R}[X], \deg(P) \leq 2\}$, on considère la famille de vecteurs $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3)$.

   (a) Donner la définition mathématique (avec les quantificateurs) de « $\mathcal{F}$ est une famille libre de E ».

   ....
   ....
   ....

   (b) Donner la définition mathématique (avec les quantificateurs) de « $\mathcal{F}$ est une famille liée de E ».

   ....
   ....
   ....

   (c) Donner la définition mathématique (avec les quantificateurs) de « $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E ».

   ....
   ....
   ....

2. Donner, sans justifier, un exemple d'une famille libre de $\mathbb{R}^3$ composée de 2 vecteurs.

   ....
   ....
   ....

3. Donner, sans justifier, un exemple d'une famille liée de $\mathbb{R}^3$ composée de 3 vecteurs.

   ....
   ....
   ....