EPITA

Mathématiques

Examen S2-B3-EV

Espaces vectoriels

durée : 1 heure

Mars 2024

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 20 points.

Consignes :

- Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 3 exercices.**
- **La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
- Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.
- Documents et calculatrices interdits.
- Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 : sous-espaces vectoriels (10 points)

1. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F un ensemble. Donner les conditions mathématiques pour avoir : « F est un sous-espace vectoriel de E »

....
....

2. Dire si les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Justifiez rigoureusement votre réponse.

(a) $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\, P'(1) = 1\}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

(b) $G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\, 2x = z\right\}$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

(c) $H = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists\,(a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b\right\}$ (ensemble des fonctions affines).

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. Donner sans justifier :

   (a) un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}[X]$ autre que E et $\{0_E\}$.

   ....

   (b) un sous-ensemble de $E = \mathbb{R}^2$ (autre qu'un singleton) qui ne soit pas un sous-espace vectoriel de E.

   ....

Exercice 2 : somme de sev (5 points)

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère les deux sous-espaces vectoriels $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 0\right\}$ et $G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ z = 0\right\}$

1. Géométriquement, que représentent F et G ?

   ....
   ....

2. Soit $u = (x, y, z) \in E$. Le vecteur u appartient-il à $F + G$? Justifier.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. A-t-on $E = F + G$? Justifier.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

4. A-t-on $E = F \oplus G$? Justifier. Vous rappellerez avant la caractérisation mathématique avec les quantificateurs de $E = F \oplus G$.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

5. $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Si oui, faire la preuve, si non donner un contre-exemple.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Exercice 3 : les familles (5 points)

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la famille de vecteurs $\mathcal{F} = (u, v, w)$.

1. Donner la définition mathématique (avec les quantificateurs) de « $\mathcal{F}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ ».

   ....
   ....
   ....

2. Donner la définition mathématique (avec les quantificateurs) de « $\mathcal{F}$ est une famille liée de $\mathbb{R}^3$ ».

   ....
   ....
   ....

3. Donner la définition mathématique (avec les quantificateurs) de « $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ ».

   ....
   ....
   ....

4. Donner, sans justifier, un exemple d'une famille libre de $\mathbb{R}^3$ composée de 3 vecteurs.

   ....
   ....
   ....

5. Donner, sans justifier, un exemple d'une famille liée de $\mathbb{R}^3$ composée de 3 vecteurs.

   ....
   ....
   ....