EPITA

Mathématiques

Examen S2-B3-APEF

Polynômes, équations différentielles, fonctions

durée : 2 heures

Mars 2024

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 40 points. La note sera ramenée à 20 par division par 2.

Consignes :

- Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 6 exercices.**
- **La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
- Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.
- Documents et calculatrices interdits.
- Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 : polynômes 1 (6,5 points)

On considère $P(X) = X^5 + 4X^4 + 7X^3 + 6X^2 + 2X \in \mathbb{R}[X]$.

1. Sans utiliser la notion de dérivée, montrer que 0 est une racine d'ordre de multiplicité exactement 1 de P.

2. Montrer que -1 est une racine d'ordre de multiplicité exactement 2 de P.

3. En déduire que $X^3 + 2X^2 + X \mid P$.

4. En vous servant d'une division euclidienne que vous poserez, écrire P comme produits de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2 : polynômes 2 (2,5 points)

Dans $\mathbb{R}[X]$, considérons un polynôme P de la forme $P(X) = Q(X) \times (X-1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et Q un polynôme de degré 2. On suppose de plus que :

$$Q(0) = 0, Q(-1) = 0, Q(1) = 2, P(1) = P'(1) = P''(1) = 0 \text{ et } P^{(3)}(1) \neq 0$$

Trouver P sous une forme factorisée. Expliquez brièvement votre raisonnement.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 3 : équations différentielles (9 points)

1. Trouver une solution particulière pour chaque équation différentielle suivante. Vous justifierez brièvement.
   (a) $(E)\ : 2y' + 6y = -3$ sur $I = \mathbb{R}$.

   ....
   ....
   ....

   (b) $(E)\ : y' + y = e^x$ sur $I = \mathbb{R}$.

   ....
   ....
   ....

   (c) $(E)\ : y'' + y' + y = x + 1$ sur $I = \mathbb{R}$.

   ....
   ....
   ....

2. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, $(E)\ : y'' + y' + y = x + 1$.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, $(E)\ : (e^x+1)y' + e^x y = \cos(3x)$.

Exercice 4 : étude locale de fonctions (9 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Soient $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 et ne s'y annulant pas. Donner deux définitions mathématiques de chacune des notations suivantes : $f = o(g)$ et $f \sim g$ au voisinage de x_0.

2. Donner un équivalent en 0 ET en $+\infty$ de $P(x) = 2x^3 - x^2 + 6x$. Justifiez vos réponses.

3. (a) Donner un équivalent en 0 de $f(x) = \sin(2x)$. Justifier brièvement.

   ....

   (b) Donner un équivalent en 0 de $g(x) = 1 - e^{-2x}$. Justifier brièvement.

   ....

   (c) Donner un équivalent en 0 de $h(x) = f(x) \times g(x)$.

   ....

   (d) Donner un équivalent en 0 de $k(x) = f(x) - g(x)$. Justifier.

   ....

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur α pour avoir $\dfrac{\ln(x)}{x^2} = o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ en $+\infty$.

   ....

5. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 d'une fonction f vérifiant $f(x) \sim -2x$ en 0 ET $f(x) + 2x = o(x^3)$ en 0.

   ....

Exercice 5 : développements limités (7 points)

1. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $f(x) = \cos(x) \times \sqrt{1 - x^2}$.

   ....

2. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $g(x) = \ln(2 - \sin(x))$.

Exercice 6 : calcul de limites (6 points)

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x$. Vous prendrez soin de votre rédaction.

2. Soient f, g et h trois fonctions telles qu'au voisinage de 0 :

$$f(x) = 1 - 3x + \frac{x^3}{4} + o(x^3), \quad g(x) = -3 - x^2 + o(x^2) \quad \text{et} \quad h(x) = 1 + 3x + o(x)$$

Donner $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - xg(x) - 1}{h(x) - 1}$. Vous prendrez soin de votre rédaction.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....