# S2PA-B3 Correction EFDP

## Exercice 1 : ensembles et fonctions 1

*Soient* $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{2, 3, 4\}$.

1. *Quel est le cardinal de* $E \times F$ *?*

   $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F) = 4 \times 3 = 12$.

2. *A-t-on* $E \times F = F \times E$ *? Pourquoi ?*

   Non $E \times F \neq F \times E$ car $(1, 2) \in E \times F$ et $(1, 2) \notin F \times E$.

3. *On définit la fonction* $f : \begin{array}{ccc} E \times F & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$

   (a) *Remplir ci-dessous le tableau de valeurs de la fonction* $f$ *:*

| $(x, y)$ | $(1, 2)$ | $(1, 3)$ | $(1, 4)$ | $(2, 2)$ | $(2, 3)$ | $(2, 4)$ | $(3, 2)$ | $(3, 3)$ | $(3, 4)$ | $(4, 2)$ | $(4, 3)$ | $(4, 4)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f((x, y))$ | 3 | 4 | 5 | 4 | 5 | 6 | 5 | 6 | 7 | 6 | 7 | 8 |

   (b) *Déterminer* $f(E \times F)$, $f(\{(2, 2), (1, 3), (4, 3)\})$, $f^{-1}(\{1\})$ et $f^{-1}(\{6\})$.

   $f(E \times F) = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $f(\{(2, 2), (1, 3), (4, 3)\}) = \{4, 7\}$, $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$ et $f^{-1}(\{6\}) = \{(2, 4), (3, 3), (4, 2)\}$.

   (c) *Écrire la définition de : « $f$ injective de $E \times F$ vers $\mathbb{N}$ ». $f$ est-elle injective ? Justifier.*

   — $f$ injective de $E \times F$ vers $\mathbb{N}$ signifie : $\forall\ ((x, y), (x', y')) \in (E \times F)^2$, $f((x, y)) = f(x', y') \implies (x, y) = (x', y')$.

   — Dans notre cas, $f$ n'est pas injective car $f((1, 3)) = f((2, 2)) = 4$ et $(1, 3) \neq (2, 2)$.

   (d) *Écrire la définition de : « $f$ surjective de $E \times F$ vers $\mathbb{N}$ ». $f$ est-elle surjective ? Justifier.*

   — $f$ surjective de $E \times F$ vers $\mathbb{N}$ signifie : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\,(x, y) \in E \times F$ tel que $n = f((x, y))$.

   — Dans notre cas, $f$ n'est pas surjective car $\forall\,(x, y) \in E \times F$, $f((x, y)) \neq 10$ et $10 \in \mathbb{N}$. 10 n'a donc pas d'antécédent.

   (e) *Déterminer $A \subset E \times F$ et $B \subset \mathbb{N}$ telle que $f : A \longrightarrow B$ soit injective, non surjective. (Les ensembles $A$ et $B$ doivent contenir au moins deux éléments).*

   On peut prendre $A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$ et $B = \mathbb{N}$.

   (f) *Déterminer $A' \subset E \times F$ et $B' \subset \mathbb{N}$ telle que $f : A' \longrightarrow B'$ soit surjective, non injective. (les ensembles $A'$ et $B'$ doivent contenir au moins deux éléments).*

   On peut $A' = E \times F$ et $B' = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

## Exercice 2 : ensembles et fonctions 2

*Compléter le tableau suivant.*

*N.B. : nous vous conseillons de dessiner le graphe des fonctions concernées au brouillon ! Bien sûr, la fonction* exp *est la fonction* $x \mapsto e^x$ *et la fonction* sin *est* $x \mapsto \sin(x)$.

| $f$ | $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ | $\sin : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ |
|---|---|---|
| $f(\{0\})$ | $\{1\}$ | $\{0\}$ |
| $f(\,]0,\pi]\,)$ | $]1, e^{\pi}]$ | $[0,1]$ |
| $f^{-1}(\{0\})$ | $\emptyset$ | $\{-\pi, 0, \pi\}$ |
| $f^{-1}(\{1\})$ | $\{0\}$ | $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ |
| $f^{-1}(\,]-\infty, 0])$ | $\emptyset$ | $[-\pi, 0] \cup \{\pi\}$ |

# Exercice 3 : fonction arctan

*On considère la fonction bijective* $\tan : \begin{cases} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \alpha & \longmapsto & \tan(\alpha) \end{cases}$

*Soit* arctan *la fonction réciproque de* tan.

1. *Rappeler le domaine de définition $D$ de la fonction* arctan *ainsi que son domaine d'arrivée* $\arctan(D)$.

   On a $D = \mathbb{R}$ et $\arctan(D) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

2. *Rappeler l'expression de la dérivée de* arctan.

   Pour tout réel $x$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

3. *Remplir le tableau suivant :*

| $\alpha$ | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $\arctan(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tan(\alpha)$ | $0$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $-\sqrt{3}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $-1$ | $x$ |

# Exercice 4 : dénombrement 1

1. *Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler la formule du binôme de Newton donnant $(a+b)^n$.*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k}$$

2. *Soit $E$ un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.*
   (a) *Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$. Combien y a-t-il de sous-ensembles de $E$ à $k$ éléments ?*

   Il y a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles à $k$ éléments dans $E$.

   (b) ***En utilisant les questions précédentes et en justifiant**, calculer le cardinal de $\mathcal{P}(E)$.*

   Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de $E$ à $k$ éléments.

   On a $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}_0(E) \sqcup \mathcal{P}_1(E) \sqcup \mathcal{P}_2(E) \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{P}_n(E)$.

   Ainsi,

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(\mathcal{P}_k(E)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k . 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

# Exercice 5 : dénombrement 2

*On considère les $N = 400$ étudiants de sup à Epita, répartis en 10 classes de 40 élèves. On désire réaliser un sondage de satisfaction sur l'école auprès d'un échantillon de $n = 40$ étudiants sélectionnés aléatoirement.*

*N.B. : on ne demande pas d'effectuer les calculs.*

1. *Combien y a-t-il de façons de sélectionner l'échantillon ? Justifier.*

   On fait un tirage simultané de 40 élèves parmi 400, sans ordre et sans remise. Il y a donc $\binom{400}{40}$ façons de sélectionner l'échantillon.

2. *Combien y a-t-il de façons de sélectionner l'échantillon si on impose qu'il contienne autant d'étudiants de chaque classe ? Justifier.*

   Dans chaque classe, on a donc besoin de 4 élèves. Il y a $\binom{40}{4}$ façons de sélectionner les 4 élèves dans la classe 1, $\binom{40}{4}$ façons de sélectionner les 4 élèves dans la classe 2,..., $\binom{40}{4}$ façons de sélectionner les 4 élèves dans la classe 10. Au total, il y a $\left(\binom{40}{4}\right)^{10}$ façons de sélectionner l'échantillon dans ce cas-là.

3. *Chaque classe possède deux délégués, qu'on impose dans l'échantillon. Combien y a-t-il de façons de sélectionner l'échantillon si les autres étudiants doivent être répartis équitablement dans chaque classe ? Justifier.*

   Il faut toujours 4 élèves par classe dont les 2 délégués. Ainsi, pour la classe 1, il n'y a qu'une seule façons de choisir les délégués et $\binom{38}{2}$ façons de prendre les deux autres élèves. Donc, pour la classe 1, il y a $\binom{38}{2}$ façons de choisir les 4 élèves. C'est la même chose pour les autres classes.

   Au total, il y a donc $\left(\binom{38}{2}\right)^{10}$ façons de sélectionner l'échantillon dans ce cas là.

4. *On remarque que parmi les 400 élèves, 50 élèves sont des filles. On veut un échantillon paritaire (autant de filles que de garçons). Combien y a-t-il de façons de le sélectionner ? Justifier.*

   Il faut prendre 20 filles et 20 garçons. Ainsi, il y a $\binom{50}{20} \times \binom{350}{20}$ façons de sélectionner l'échantillon dans ce cas-là.

# Exercice 6 : probabilités conditionnelles

*Dans une promotion d'élèves en PA à Epita, on considère que seuls 40% apprennent leur cours de maths. Pour ceux qui apprennent le cours, la probabilité de valider l'année est de 80%. Pour les autres, celle-ci tombe à 20%. On note C l'événement « apprendre son cours » et V l'événement « valider l'année ». Vous donnerez les résultats sous formes de fraction simplifiée.*

1. *Traduire l'énoncé en termes de probabilités.*

   $P(C) = 0,4$, $P(V \mid C) = 0,8$ et $P(V \mid \overline{C}) = 0,2$.

2. *On choisit un élève de PA au hasard, quelle est sa probabilité de valider ?*

   Comme $\{C, \overline{C}\}$ forme une partition de $\Omega$, on a $V = (V \cap C) \cup (V \cap \overline{C})$ (union disjointe). D'où,

$$P(V) = P(V \cap C) + P(V \cap \overline{C}) = P(V \mid C)P(C) + P(V \mid \overline{C})P(\overline{C}) = 0,8 \times 0,4 + 0,2 \times 0,6 = 0,44 = \frac{11}{25}$$

3. *On choisit un élève qui valide l'année, au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait appris son cours ?*

   On cherche $P(C \mid V)$. On a

$$P(C \mid V) = \frac{P(V \cap C)}{P(V)} = \frac{P(V \mid C)P(C)}{P(V)} = \frac{0,4 \times 0,8}{0,44} = \frac{8}{11}$$

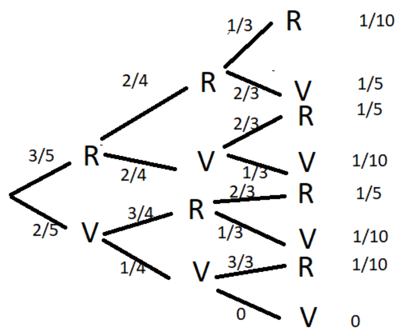
4. *Quelle proportion minimale $p$ d'élèves qui apprennent leur cours faudrait-il pour que 60% de la promotion valide ?*

   Dans ce cas, en suivant le raisonnement de la question 1., $P(V) = 0,8p + 0,2(1 - p) = 0,6p + 0,2$. On veut $p$ tel que $0.6p + 0.2 \geq 0,6$. Cela donne $p \geq \frac{2}{3}$.

# Exercice 7 : variables aléatoires

*On dispose d'une urne contenant 3 boules rouges et 2 boules vertes. On effectue un tirage successif sans remise de 3 boules de l'urne. Vous donnerez les résultats sous forme de fraction simplifiée.*

1. *Faire un schéma représentant toutes les issues possibles ainsi que leur probabilité (arbre pondéré).*




2. *On note $X$ la variable aléatoire qui compte le nombre de boules vertes obtenues.*
   (a) *Donner la loi de $X$.*

   On a $X(\Omega) = [\![0, 2]\!]$.

   $P(X=0) = P(RRR) = \dfrac{1}{10}$, $P(X=1) = P(RRV) + P(RVR) + P(VRR) = \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{5}$ et
   $P(X=2) = P(VVR) + P(VRV) + P(RVV) = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{3}{10}$.

   (b) *Calculer son espérance et sa variance.*

   — $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} kP(X=k) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$.
   — $E(X^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} k^2 P(X=k) = 0^2 \times \frac{1}{10} + 1^2 \times \frac{3}{5} + 2^2 \times \frac{3}{10} = \frac{9}{5}$.
   — $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \dfrac{9}{5} - \dfrac{36}{25} = \dfrac{9}{25}$.

3. *On note $Y$ la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient au moins une boule verte, 0 sinon.*
   (a) *Exprimer l'événement « $Y = 1$ » à partir des valeurs prises par $X$.*

   On a $Y = 1 \iff X \geq 1$.

   (b) *En déduire la loi de $Y$.*

   $P(Y=1) = P(X=1) + P(X=2) = \dfrac{9}{10}$ et $P(Y=0) = P(X=0) = \dfrac{1}{10}$.
   $Y$ suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $p = 9/10$.

   (c) *Donner son espérance et sa variance.*

   $E(Y) = p = 9/10$ et $V(Y) = p(1-p) = 9/100$.

4. *On répète le tirage 10 fois de suite en remettant les boules entre chaque tirage. Les tirages sont indépendants. On note $Z$ la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où on a obtenu au moins une boule verte.*

(a) *Quelles sont les valeurs prises par $Z$ ?*

$Z(\Omega) = [\![0, 10]\!]$.

(b) *Soit $k \in Z(\Omega)$. Que vaut $P(Z = k)$ ? Justifier.*

$Z$ est en fait l'addition de 10 variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $p = 9/10$. $Z$ suit donc une loi binomiale de paramètres $p$ et $n = 10$. Ainsi, pour tout $k \in [\![0, 10]\!]$,

$$P(Z = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{9}{10}\right)^k \left(\frac{1}{10}\right)^{n-k}$$

(c) *Donner l'espérance et la variance de $Z$.*

$E(Z) = np = 9$ et $V(Z) = np(1 - p) = \dfrac{9}{10}$.