S2PA-B3 Correction CCISR

Exercice :

Les questions sont indépendantes.

1. (2 points). *Calculer directement* $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2+1}{2\sqrt{t^3+3t}}\,\mathrm{d}t$

   On a $I = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^1 \frac{3t^2+3}{2\sqrt{t^3+3t}}\,\mathrm{d}t$ et on reconnait la forme $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ dans l'intégrale.

   Ainsi : $I = \dfrac{1}{3}\left[\sqrt{t^3+3t}\right]_0^1 = \dfrac{1}{3}\left(\sqrt{4}-\sqrt{0}\right) = \dfrac{2}{3}$.

2. (4 points). *Via une intégration par parties* ***dont vous rappellerez la formule générale****, calculer* $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} x\sin(3x)\,\mathrm{d}x$

   Pour deux fonctions u et v de classe C^1 sur un intervalle $[a,b]$, on a $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$.

   Pour J, on pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin(3x)$. On a alors $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\dfrac{1}{3}\cos(3x)$.

$$\begin{aligned} J &= \left[-\frac{x}{3}\cos(3x)\right]_0^{\frac{\pi}{12}} + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{12}} \cos(3x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\pi}{36}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3}\left[\frac{\sin(3x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{12}} \\ &= -\frac{\sqrt{2}\pi}{72} + \frac{\sqrt{2}}{18} \end{aligned}$$

3. (4 points). *Calculer* $K = \displaystyle\int_0^{\ln(\sqrt{3})} \frac{1}{e^{-t}+e^t}\,\mathrm{d}t$ *en posant* $x = e^t$.

   $x = e^t \iff t = \ln(x)$. Ainsi, $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$. De plus, si $t = \ln(\sqrt{3})$, $x = e^{\ln(\sqrt{3})} = \sqrt{3}$ et si $t = 0$, $x = e^0 = 1$. Ainsi,

$$K = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\frac{1}{x}+x}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [\arctan(x)]_1^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$