S2 B3 Correction EV

Exercice 1 : sous-espaces vectoriels

1. *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F un ensemble. Donner les conditions mathématiques pour avoir : « F est un sous-espace vectoriel de E »*

   F est uns sous-espace vectoriel de de $E \iff$ 1) $F \subset E$, 2) $0_E \in F$, 3) $\forall (u,v) \in F^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha u + v \in F$.

2. *Dire si les ensembles suivants sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Justifiez rigoureusement votre réponse.*

   (a) $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\, P'(1) = 1\}$

   $0_{\mathbb{R}[X]} \notin F$ donc F n'est pas un espace vectoriel.

   (b) $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\, 2x = z\right\}$

   - On a $G \subset \mathbb{R}^3$ et $0_{\mathbb{R}^3} \in H$ car $2 \times 0 = 0$.
   - Soient $(u = (x,y,z), v = (x',y',z')) \in G^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   On a $\alpha u + v = (\alpha x + x', \alpha y + y', \alpha z + z')$. Ainsi, $2(\alpha x + x') = \alpha \times 2x + 2x' = \alpha z + z'$. On en déduit que $\alpha u + v \in G$.

   - Conclusion : G est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. C'est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

   (c) $H = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b\right\}$ (ensemble des fonctions affines).

   - On a $H \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \in H$ car, pour tout réel x, $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}(x) = 0x + 0$.
   - Soient $(f,g) \in H^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Comme $f \in H$, $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ et comme $g \in H$, $\exists (a',b') \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = a'x + b'$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors $(\alpha f + g)(x) = \alpha f(x) + g(x) = \alpha(ax + b) + (a'x + b') = (\alpha a + a')x + (\alpha b + b')$. Comme $\alpha a + a' \in \mathbb{R}$ et $\alpha b + b' \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\alpha f + g \in H$.
   - Conclusion : H est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. C'est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3. *Donner sans justifier :*

   (a) *un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}[X]$ autre que E et $\{0_E\}$.*

   $\{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

   (b) *un sous-ensemble de $E = \mathbb{R}^2$ (autre qu'un singleton) qui ne soit pas un sous-espace vectoriel de E.*

   $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 1\right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 2 : somme de sev

Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère les deux sous-espaces vectoriels $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 0\right\}$ et $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z = 0\right\}$

1. *Géométriquement, que représentent F et G ?.*

   Ce sont deux plans.

2. *Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Le vecteur u appartient-il à $F + G$? Justifier.*

   Oui car on peut écrire par exemple $u = (x,y,z) = u_1 + u_2$ avec $u_1 = (0,y,z) \in F$ et $u_2 = (x,0,0) \in G$.

3. *A-t-on $E = F + G$? Justifier.*

   De la question précédente, on a montré que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $u \in F + G$. Ainsi $\mathbb{R}^3 \subset F + G$. Or $F + G \subset \mathbb{R}^3$. Donc $F + G = \mathbb{R}^3$.

4. *A-t-on $E = F \oplus G$? Justifier. Vous rappellerez avant la caractérisation mathématique avec les quantificateurs de $E = F \oplus G$.*

   $E = F \oplus G$ signifie : $\forall\, u \in E$, $\exists!(u_1, u_2) \in F \times G$ tel que $u = u_1 + u_2$.

   Ici, nous n'avons pas l'unicité de la décomposition car dans la question 2. on aurait aussi pu écrire $u = v_1 + v_2$ avec $v_1 = (0, 0, z) \in F$ et $v_2 = (x, y, 0) \in G$. Et en fait, il y a une infinité de décompositions possibles. Donc, ici $E \neq F \oplus G$.

5. *$F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Justifier.*

   Non car $u = (0, 1, 1) \in F$ donc $u \in F \cup G$. $v = (1, 1, 0) \in G$ donc $v \in F \cup G$. Mais $u + v = (1, 2, 1)$ n'est ni dans F, ni dans G donc $u + v \notin F \cup G$. $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 3 : les familles

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la famille de vecteurs $\mathcal{F} = (u, v, w)$.

1. *Donner la définition mathématique (avec les quantificateurs) de « $\mathcal{F}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ ».*

   $\mathcal{F}$ est libre $\iff \left[\forall\, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3,\ \alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3} \implies \alpha = \beta = \gamma = 0\right]$

2. *Donner la définition mathématique (avec les quantificateurs) de « $\mathcal{F}$ est une famille liée de $\mathbb{R}^3$ ».*

   $\mathcal{F}$ est liée $\iff \left[\exists\, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}\,,\ \alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3}\right]$

3. *Donner la définition mathématique (avec les quantificateurs) de « $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ ».*

   $\mathcal{F}$ génératrice de $\mathbb{R}^3 \iff \left[\forall\, X \in \mathbb{R}^3,\ \exists\, (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3,\ X = \alpha u + \beta v + \gamma w\right]$

4. *Donner, sans justifier, un exemple d'une famille libre de $\mathbb{R}^3$ composée de 3 vecteurs.*

   $\mathcal{F} = (u = (1, 0, 0), v = (0, 1, 0), w = (0, 0, 1))$ est libre.

5. *Donner, sans justifier, un exemple d'une famille liée de $\mathbb{R}^3$ composée de 3 vecteurs.*

   $\mathcal{F} = (u = (1, 0, 0), v = (0, 1, 0), w = (1, 1, 0))$ est liée.