S2 B3 Correction APEF

Exercice 1 : polynômes 1

On considère $P(X) = X^5 + 4X^4 + 7X^3 + 6X^2 + 2X \in \mathbb{R}[X]$.

1. *Sans utiliser la notion de dérivée, montrer que* 0 *est une racine d'ordre de multiplicité exactement* 1 *de* P.

   On a $P(X) = X\left(X^4 + 4X^3 + 7X^2 + 6X + 2\right) = XQ(X)$ avec $Q(0) = 2 \neq 0$. Ainsi, 0 est une racine simple de P.

2. *Montrer que* -1 *est une racine d'ordre de multiplicité exactement* 2 *de* P.

   - $P(-1) = -1 + 4 - 7 + 6 - 2 = 0$
   - $P'(X) = 5X^4 + 16X^3 + 21X^2 + 12X + 2$. D'où, $P'(-1) = 5 - 16 + 21 - 12 + 2 = 0$.
   - $P''(X) = 20X^3 + 48X^2 + 42X + 12$. D'où, $P''(-1) = -20 + 48 - 42 + 12 = -2 \neq 0$. On en déduit que -1 est une racine d'ordre exactement 2 de P.

3. *En déduire que* $X^3 + 2X^2 + X \mid P$.

   Des questions précédentes, on a $X \mid P$ et $(X+1)^2 \mid P$. Comme les deux racines sont distinctes, $X(X+1)^2 \mid P$. Ce qui donne, $X^3 + 2X^2 + X \mid P$.

4. *En vous servant d'une division euclidienne que vous poserez, écrire* P *comme produits de polynômes irréductibles dans* $\mathbb{R}[X]$ *et dans* $\mathbb{C}[X]$.

   On effectue alors la division euclidienne de P par $X^3 + 2X^2 + X$. On trouve comme quotient : $X^2 + 2X + 2$ (et évidemment un reste nul !). Ainsi $P(X) = X(X+1)^2(X^2 + 2X + 2)$.
   Comme $X^2 + 2X + 2$ a un discriminant strictement négatif (égal à -4), il est bien irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Ainsi, dans $\mathbb{R}[X]$, la factorisation de P en polynômes irréductibles est $P(X) = X(X+1)^2(X^2 + 2X + 2)$.
   Dans $\mathbb{C}[X]$, les racines de $X^2 + 2X + 2$ sont $\dfrac{-2+2i}{2} = -1 + i$ et $-1 - i$ (le conjugué).
   Donc, dans $\mathbb{C}[X]$, $P(X) = X(X+1)^2(X + 1 - i)(X + 1 + i)$.

Exercice 2 : polynômes 2

Dans $\mathbb{R}[X]$, *on considère un polynôme* P *de la forme* $P(X) = Q(X) \times (X-1)^n$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* Q *un polynôme de degré* 2. *On suppose de plus que :*

$$Q(0) = 0, Q(-1) = 0, Q(1) = 2, P(1) = P'(1) = P''(1) = 0 \text{ et } P^{(3)}(1) \neq 0$$

Trouver P *sous une forme factorisée. Expliquez brièvement votre raisonnement.*

Comme Q est de degré 2 et que $Q(0) = 0$, $Q(-1) = 0$, on a $Q(X) = \alpha X(X+1)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Or $Q(1) = 2$, d'où $\alpha \times 1 \times (1+1) = 2$. Cela donne $\alpha = 1$. Ainsi, $Q(X) = X(X+1)$.

De plus, $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ et $P^{(3)}(1) \neq 0$ ce qui signifie que 1 est une racine d'ordre exactement 3 de P. Donc $n = 3$.

Donc $P(X) = X(X+1)(X-1)^3$.

Exercice 3 : équations différentielles

1. *Trouver une solution particulière pour chaque équation différentielle suivante. Vous justifierez brièvement.*
   (a) $(E)\ : 2y' + 6y = -3$ sur $I = \mathbb{R}$.

   $y_p : x \mapsto \dfrac{-1}{2}$ est une solution évidente car $2y_p'(x) + 6y_p(x) = 2 \times 0 + 6 \times \dfrac{-1}{2} = -3$.

   (b) $(E)\ : y' + y = e^x$ sur $I = \mathbb{R}$.

   $y_p : x \mapsto \dfrac{e^x}{2}$ est une solution évidente car $y_p'(x) + y_p(x) = \dfrac{e^x}{2} + \dfrac{e^x}{2} = e^x$.

   (c) $(E)\ : y'' + y' + y = x + 1$ sur $I = \mathbb{R}$.

   $y_p : x \mapsto x$ est une solution évidente car $y_p''(x) + y_p'(x) + y_p(x) = 0 + 1 + x = x + 1$.

2. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$, $(E)\ : y'' + y' + y = x + 1$.

   L'équation caractéristique associée à (E) est $(C) :\ r^2 + r + 1 = 0$ qui admet deux racines complexes $r_1 = \dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \overline{r_1}$.

   De plus, dans la question précédente 1.(c), nous avons trouvé que $y_p : x \mapsto x$ est une solution évidente de (E). On peut donc conclure

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-\frac{x}{2}} \left(k_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + k_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right) + x \end{array} ;\quad (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

3. *Résoudre, dans* $\mathbb{R}$, $(E)\ : (e^x + 1)y' + e^x y = \cos(3x)$.

   • Étape 1 : résolution de (E_0) $(e^x + 1)y' + e^x y = 0$
   On a

$$y_0(x) = ke^{-\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x + 1}\,\mathrm{d}x} = ke^{-\ln(e^x+1)} = \frac{k}{e^x + 1};\quad k \in \mathbb{R}$$

   • Étape 2 : recherche d'une solution particulière (SP) de (E). On la cherche de la forme $y_p(x) = \dfrac{k(x)}{e^x + 1}$. On a

$$\begin{aligned} y_p \text{ SP de } (E) \quad &\iff \quad (e^x + 1)y_p' + e^x y_p = \cos(3x) \\ &\iff \quad (e^x + 1)\frac{k'(x)(e^x + 1) - e^x k(x)}{(e^x + 1)^2} + e^x \frac{k(x)}{e^x + 1} = \cos(3x) \\ &\iff \quad k'(x) = \cos(3x) \end{aligned}$$

   On prend par exemple $k(x) = \dfrac{1}{3}\sin(3x)$. Ainsi, $y_p(x) = \dfrac{\sin(3x)}{3(e^x + 1)}$.

   • Conclusion :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{k}{e^x + 1} + \dfrac{\sin(3x)}{3(e^x + 1)} \end{array} ;\quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 4 : étude locale de fonctions

Les questions sont indépendantes.

1. *Soient* $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *et* f *et* g *deux fonctions définies au voisinage de* x_0 *et ne s'y annulant pas. Donner deux définitions mathématiques de chacune des notations suivantes :* $f = o(g)$ *et* $f \sim g$ *au voisinage de* x_0.

   • $f = o(g)$ en $x_0 \iff$ Au voisinage de x_0, $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0 \iff \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

   • $f \sim g$ en $x_0 \iff$ Au voisinage de x_0, $f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0 \iff \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

2. *Donner un équivalent en* 0 *ET en* $+\infty$ *de* $P(x) = 2x^3 - x^2 + 6x$. *Justifiez vos réponses.*
   - On a $\dfrac{P(x)}{2x^3} = 1 - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{3}{x^2}$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{2x^3} = 1$. Donc $P(x) \sim 2x^3$ en $+\infty$.
   - On a $\dfrac{P(x)}{6x} = \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x}{6} + 1$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{P(x)}{6x} = 1$. Donc $P(x) \sim 6x$ en 0.
3. (a) *Donner un équivalent en* 0 *de* $f(x) = \sin(2x)$. *Justifier brièvement.*

   Via le DL, $\sin(2x) = 2x + o(x)$. Donc, en 0, $f(x) \sim 2x$.

   (b) *Donner un équivalent en* 0 *de* $g(x) = 1 - e^{-2x}$. *Justifier brièvement.*

   $g(x) = 1 - e^{-2x} = 1 - (1 - 2x + o(x)) = 2x + o(x)$. Donc, en 0, $g(x) \sim 2x$.

   (c) *Donner un équivalent en* 0 *de* $h(x) = f(x) \times g(x)$.

   $h(x) \sim 2x \times 2x = 4x^2$.

   (d) *Donner un équivalent en* 0 *de* $k(x) = f(x) - g(x)$. *Justifier.*

   Il faut aller plus loin dans les DL :
   $k(x) = 2x + o(x^2) - \left(1 - \left(1 - 2x + \dfrac{4x^2}{2} + o(x^2)\right)\right) = 2x^2 + o(x^2)$. Donc, en 0, $k(x) \sim 2x^2$.
4. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Trouver une condition nécessaire et suffisante sur* α *pour avoir* $\dfrac{\ln(x)}{x^2} = o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ *en* $+\infty$.

$$\frac{\frac{\ln(x)}{x^2}}{\frac{1}{x^\alpha}} = x^{\alpha-2}\ln(x)$$

   Ainsi, si $\alpha - 2 > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha-2}\ln(x) = +\infty$. Si $\alpha = 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$. Si $\alpha - 2 < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha-2}\ln(x) = 0$ par croissance comparée.
   En conclusion, $\dfrac{\ln(x)}{x^2} = o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ en $+\infty$ si et seulement si $\alpha < 2$.
5. *Donner le développement limité à l'ordre 3 en* 0 *d'une fonction* f *vérifiant* $f(x) \sim -2x$ *en* 0 *ET* $f(x) + 2x = o(x^3)$ *en* 0.

   $f(x) = -2x + o(x^3)$.

Exercice 5 : développements limités

1. *Donner le développement limité en* 0 *à l'ordre* 4 *de* $f(x) = \cos(x) \times \sqrt{1 - x^2}$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}(-x^2) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2}(-x^2)^2 + o(x^4)\right) \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) \times \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\
&= 1 - x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)
\end{aligned}$$

2. *Donner le développement limité en* 0 *à l'ordre* 3 *de* $g(x) = \ln(2 - \sin(x))$.

$$\begin{aligned}
g(x) &= \ln\left(2 - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\
&= \ln\left(2\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)\right) \\
&= \ln(2) + \ln\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)
\end{aligned}$$

Posons $u = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^3}{12} + o(x^3)$. u tend vers 0 quand x tend vers 0.

On peut donc appliquer le DL de $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{3} + o(u^3)$. On a $u^2 = \dfrac{x^2}{4} + o(x^3)$ et $u^3 = -\dfrac{x^3}{8} + o(x^3)$. Ainsi,

$$g(x) = \ln(2) - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{24} + o(x^3) = \ln(2) - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)$$

Exercice 6 : calcul de limites

1. *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^x$. *Vous prendrez soin de votre rédaction.*

$$\begin{aligned}
\left(1+\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right)^x &= e^{x\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)} \\
&= e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)} \\
&= e^{x\times\left(\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)} \\
&= e^{1+o(1)}
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^x = e^1$

2. *Soient f, g et h trois fonctions telles qu'au voisinage de 0 :*

$$f(x) = 1 - 3x + \frac{x^3}{4} + o(x^3) \quad g(x) = -3 - x^2 + o(x^2) \quad \text{et} \quad h(x) = 1 + 3x + o(x)$$

Donner $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - xg(x) - 1}{h(x) - 1}$. *Vous prendrez soin de votre rédaction.*

— $f(x) - xg(x) - 1 = 1 - 3x + \dfrac{x^3}{4} + o(x^3) - x\left(-3 - x^2 + o(x^2)\right) - 1 = \dfrac{x^3}{4} + x^3 + o(x^3) = \dfrac{5x^3}{4} + o(x^3)$. On en déduit donc qu'au voisinage de 0, $f(x) - xg(x) - 1 \sim \dfrac{5x^3}{4}$.

— $h(x) - 1 = 3x + o(x) \sim 3x$ au voisinage de 0.

— Ainsi, $\dfrac{f(x) - xg(x) - 1}{h(x) - 1} \sim \dfrac{\frac{5x^3}{4}}{3x} = \dfrac{5x^2}{12}$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^2}{12} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - xg(x) - 1}{h(x) - 1} = 0$