

EPITA

Mathématiques

Contrôle S2

durée : 3 heures

Février 2023

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 40 points. La note sera ramenée à une note sur 20 en divisant par 2.

Consignes :

- Lire le sujet en entier avant de commencer. Il y a en tout 7 exercices.
 - La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.
 - Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.
 - Documents et calculatrices interdits.
 - Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.
-

2. Soit $(E_2) : y'' + 4y' + 13y = (25x^2 + 16x + 2)e^{2x}$ sur $J = \mathbb{R}$.

(a) Montrer que $y_p : x \mapsto x^2 e^{2x}$ est une solution particulière de (E_2) .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(b) Trouver toutes les solutions de (E_2) .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 3 : études locales (6,5 points)

1. Soient f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} . Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Rappeler les définitions mathématiques de : $f(x) \sim g(x)$ et $f(x) = o(g(x))$ au voisinage de a .

.....

.....

.....

.....

2. Donner, en justifiant, un équivalent simple (autre que la fonction elle-même) de $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 6x$ en $a = 0$ ET en $a = +\infty$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(c) $G = \{P \in \mathbb{R}[X], X \mid P\}$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2. Dans cette question, il n'est pas demandé de justifier les réponses.

Donner un sous-espace vectoriel de E (autre que E et $\{0_E\}$) dans les cas suivants :

(a) $E = \mathbb{R}^4$

.....
.....
.....

(b) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

.....
.....
.....

(c) $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n) \text{ converge}\}$

.....
.....
.....

Exercice 7 : espaces vectoriels 2 (5 points)

Les deux questions sont indépendantes.

1. Dans \mathbb{R}^3 , on considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 0\} \text{ et } G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y\}$$

(a) A-t-on $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$? Justifier.

.....
.....
.....

(b) Rappeler la définition mathématique de l'ensemble $F + G$.

.....
.....
.....

(c) Le vecteur $u = (1, 2, 3)$ appartient-il à $F + G$? Justifier.

.....
.....
.....

(d) La décomposition que vous avez trouvé est-elle unique? Justifier. Pourquoi en étiez-vous certain avant même de faire le moindre calcul?

.....
.....
.....

2. Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E^n$ une famille de n vecteurs de E . ($n \in \mathbb{N}^*$)

(a) Donner la définition mathématique de : \mathcal{F} est une famille libre de E .

.....
.....

(b) Donner la définition mathématique de : \mathcal{F} est une famille génératrice de E .

.....
.....

(c) Dans $E = \mathbb{R}^3$, donner un exemple d'une famille libre composée de 2 vecteurs et un exemple d'une famille liée composée de 3 vecteurs. Justification non demandée.

.....
.....
.....
.....

(d) Dans $E = \mathbb{R}^2$, donner un exemple d'une famille génératrice de E . Justification non demandée.

.....
.....
.....
.....