Correction contrôle S2 2023

Exercice 1 : polynômes

On considère le polynôme $P(X) = X^6 - X^5 - 3X^4 + 7X^3 + 14X^2 + 6X$.

1. *Montrer que* -1 *est une racine de* P *et trouver son ordre exact de multiplicité.*

   - $P(-1) = 1 + 1 - 3 - 7 + 14 - 6 = 0$. -1 est bien une racine de P.
   - $P'(X) = 6X^5 - 5X^4 - 12X^3 + 21X^2 + 28X + 6$. D'où, $P'(-1) = -6 - 5 + 12 + 21 - 28 + 6 = 0$
   - $P''(X) = 30X^4 - 20X^3 - 36X^2 + 42X + 28$. D'où, $P''(-1) = 30 + 20 - 36 - 42 + 28 = 0$.
   - $P'''(X) = 120X^3 - 60X^2 - 72X + 42$. D'où, $P'''(-1) = -66 \neq 0$.

   Donc, -1 est une racine d'ordre de multiplicité exactement 3 de P.

2. *Que peut-on en déduire en termes de divisibilité ?*

   Cela signifie que $(X+1)^3 \mid P$ et $(X+1)^4 \nmid P$.

3. *En vous aidant d'une seule division euclidienne, factoriser* P *en produit de polynômes irréductibles dans* $\mathbb{R}[X]$.

   Rappel : les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont uniquement ceux de degré 1 et ceux de degré 2 à discriminant strictement négatif.

   On pose la division euclidienne de P par $(X+1)^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$. On trouve un reste nul et un quotient $Q = X^3 - 4X^2 + 6X$.
   Ainsi, $P = (X+1)^3\left(X^3 - 4X^2 + 6X\right) = (X+1)^3 X\left(X^2 - 4X + 6\right)$. Le polynôme $X^2 - 4X + 6$ a un discriminant égal à $-8 < 0$. Il est donc irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. En conclusion, l'écriture en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ de P est : $(X+1)^3 X\left(X^2 - 4X + 6\right) = (X+1)(X+1)(X+1)X(X^2 - 4X + 6)$.

Exercice 2 : équations différentielles

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

1. *On considère l'équation différentielle* (E_1) : $(x+1)y' - 2y = (x+1)^3\cos(3x)$ *sur* $I =]-1, +\infty[$.

   (a) *Résoudre* (E_1) *sur* I.

   - Les solutions de l'équation homogène sont de la forme

   $$y_0(x) = ke^{-\int \frac{-2}{x+1}\mathrm{d}x} = ke^{2\ln(x+1)} = k(x+1)^2 \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

   - Cherchons une solution particulière (SP) de (E_1) de la forme $y_p(x) = k(x)(x+1)^2$ (variation de la constante).

   On a $y_p'(x) = k'(x)(x+1)^2 + 2k(x)(x+1)$. Ainsi :

   $$\begin{aligned} y_p(x) \text{ SP de } (E_1) &\iff (x+1)y_p'(x) - 2y_p(x) = (x+1)^3\cos(3x) \\ &\iff (x+1)^3 k'(x) + 2k(x)(x+1)^2 - 2k(x)(x+1)^2 = (x+1)^3\cos(3x) \end{aligned}$$

   D'où, $k'(x) = \cos(3x)$. Prenons par exemple $k(x) = \dfrac{1}{3}\sin(3x)$. $y_p(x) = \dfrac{(x+1)^2}{3}\sin(3x)$ est donc une SP de (E_1).

   En conclusion, $S = \left\{ \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & k(x+1)^2 + \frac{(x+1)^2}{3}\sin(3x) \end{array} ; k \in \mathbb{R} \right\}$

   (b) *Trouver les solutions de* (E_1) *telles que* $y(0) = 1$.

   On cherche la constante k telle que $y(0) = 1$. On a $y(0) = k(0+1)^2 + \frac{(0+1)^2}{3}\sin(3\times 0) = k$. Ainsi, $k = 1$ et il n'y a qu'une fonction y solution de (E_1) telle que $y(0) = 1$: $x \longmapsto (x+1)^2 + \dfrac{(x+1)^2}{3}\sin(3x)$.

2. Soit (E_2) : $y'' + 4y' + 13y = (25x^2 + 16x + 2)e^{2x}$ sur $J = \mathbb{R}$.

   (a) *Montrer que $y_p : x \longmapsto x^2 e^{2x}$ est une solution particulière de (E_2).*

   On a $y_p'(x) = \left(2x + 2x^2\right) e^{2x}$ et $y_p''(x) = \left(2 + 4x + 4x + 4x^2\right) e^{2x}$. En reportant dans l'équation, on a

$$y_p''(x) + 4y_p'(x) + 13y_p(x) = (2 + 8x + 4x^2 + 8x + 8x^2 + 13x^2)e^{2x} = (25x^2 + 16x + 2)e^{2x}$$

   y_p est bien solution de (E_2).

   (b) *Trouver toutes les solutions de (E_2).*

   • L'équation caractéristique associée à (E_2) est (C) $r^2 + 4r + 13 = 0$. Son discriminant vaut -36. Les racines sont donc $r_1 = \dfrac{-4 + 6i}{2} = -2 + 3i$ et $r_2 = -2 - 3i$.

   • On peut en déduire que $S = \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-2x}\left(k_1 \cos(3x) + k_2 \sin(3x)\right) + x^2 e^{2x} \end{array} ; (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Exercice 3 : études locales

1. *Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Rappeler les définitions mathématiques de : $f(x) \sim g(x)$ et $f(x) = o(g(x))$ au voisinage de a.*

   • $f(x) \sim g(x) \iff f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$. On peut aussi écrire $f(x) \sim g(x) \iff \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

   • $f(x) = o(g(x)) \iff f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$. On peut aussi écrire $f(x) = o(g(x)) \iff \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

2. *Donner, en justifiant, un équivalent simple (autre que la fonction elle même) de $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 6x$ en $a = 0$ ET en $a = +\infty$.*

   • On a $\dfrac{3x^3 - 2x^2 + 6x}{6x} = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{3} + 1$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{6x} = 1$. Donc, $f(x) \sim 6x$ en 0.

   • On a $\dfrac{3x^3 - 2x^2 + 6x}{3x^3} = 1 - \dfrac{2}{3x^2} + \dfrac{2}{x^2}$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{3x^3} = 1$. Donc, $f(x) \sim 3x^3$ en $+\infty$.

3. *Soient h et k deux fonctions telles qu'au voisinage de 0*

$$h(x) = 1 + 2x + x^2 - 3x^3 + o(x^3) \quad \text{et} \quad k(x) = -x + 3x^2 + o(x^2)$$

   (a) *Donner un équivalent le plus simple possible en 0 de : $h(x)$ (sans justifier), $k(x)$ (sans justifier) et $xh(x) + k(x)$ (en justifiant).*

   On a $h(x) \sim 1$ en 0 et $k(x) \sim -x$ en 0. De plus, $xh(x) + k(x) = 5x^2 + o(x^2)$. D'où, $xh(x) + k(x) \sim 5x^2$ en 0.

   (b) *A-t-on assez d'informations pour donner le développement limité de $h(x) + k(x)$ à l'ordre 1 ? À l'ordre 2 ? À l'ordre 3 ? Donner le développement limité quand la réponse est oui.*

   On peut donner les DL à l'ordre 1 et 2 mais nous n'avons pas assez d'informations pour le DL à l'ordre 3 (à cause de k). On a

$$h(x) + k(x) = 1 + x + o(x) \text{ (ordre 1) et } h(x) + k(x) = 1 + x + 4x^2 + o(x^2) \text{ (ordre 2)}$$

Exercice 4 : développements limités

Dans cet exercice, vous prendrez soin de rappeler les développements limités usuels que vous devez utiliser.

1. *Trouver le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $f(x) = \cos(x)e^{-2x}$.*

$$f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \times \left(1 - 2x + \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{3!} + o(x^3)\right)$$

Ainsi,

$$f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \times \left(1 - 2x + 2x^2 - \frac{4x^3}{3} + o(x^3)\right) = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x^3 + o(x^3)$$

Donc, $f(x) = 1 - 2x + \dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

2. *Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $g(x) = \sqrt{1+x}$ à partir d'un des cinq DL usuels.*

$$g(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

3. *Trouver le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $h(x) = \ln\left(1 + \sqrt{1+x}\right)$.*

Par la question précédente :

$$h(x) = \ln\left(2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) = \ln\left(2\left(1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + o(x^2)\right)\right) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + o(x^2)\right)$$

Posons $u(x) = \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^2}{16} + o(x^2)$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0. On a $u^2(x) = \dfrac{x^2}{16} + o(x^2)$. Comme au voisinage de 0, $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$ on obtient :

$$h(x) = \ln(2) + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} - \frac{x^2}{32} + o(x^2) = \ln(2) + \frac{x}{4} - \frac{3x^2}{32} + o(x^2)$$

Exercice 5 : calculs de limites

1. *Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin(\frac{x}{2})}$. Vous devez utiliser les DL !*

• Posons $N(x) = e^x + e^{-x} - 2$.
On a $N(x) = \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + \left(1 - x + \dfrac{(-x)^2}{2} + o(x^2)\right) - 2 = x^2 + o(x^2)$. Ainsi, $N(x) \sim x^2$ en 0.

• Posons $D(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Via les DL, on a $D(x) \sim \dfrac{x}{2}$.

• On en déduit que $\dfrac{N(x)}{D(x)} \sim \dfrac{x^2}{\frac{x}{2}} = 2x$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$, on conclut : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{N(x)}{D(x)} = 0$

2. *Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right)^x$. Vous devez utiliser les DL.*

$$\left(1 + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)^x = e^{x\ln\left(1+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)} = e^{x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})\right)\right)} = e^{x\left(\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})\right)} = e^{1+o(1)}$$

Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1 + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right)^x = e^1$

Exercice 6 : espaces vectoriels 1

1. *Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ? Justifiez rigoureusement votre réponse.*

   (a) $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y\right\}$

   Prenons le vecteur $u = (1,2)$. On a $u \in E$. Or $-u = (-1,-2) \notin E$. Ainsi, la multiplication externe n'est pas stable dans E. E n'est donc pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(b) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y = 0\}$.

De par sa donnée, $F \subset \mathbb{R}^3$. De plus $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in F$ car $0 - 0 = 0$.
Soient $(u_1 = (x, y, z), u_2 = (x', y', z')) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a $\lambda u_1 + u_2 = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$ et $(\lambda x + x') - (\lambda y + y') = \lambda (x - y) + (x' - y') = \lambda \times 0 + 0 = 0$ car u_1 et u_2 sont dans F.
Ainsi, on a montré que $\lambda u_1 + u_2 \in F$.
On en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. C'est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(c) $G = \{P \in \mathbb{R}[X],\ X \mid P\}$

On a $G \subset \mathbb{R}[X]$ et $0_{\mathbb{R}[X]} = X \times 0_{\mathbb{R}[X]}$, d'où $X \mid 0_{\mathbb{R}[X]}$ ainsi, $0_{\mathbb{R}[X]} \in G$.
Soient $(P_1, P_2) \in G^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $X \mid P_1$ et $X \mid P_2$, $\exists\,(Q_1, Q_2) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que $P_1 = XQ_1$ et $P_2 = XQ_2$. Ainsi, $\lambda P_1 + P_2 = X\,(\lambda Q_1 + Q_2)$, d'où $X \mid (\lambda P_1 + P_2)$. Donc, $\lambda P_1 + P_2 \in G$.
On en déduit que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. C'est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. *Dans cette question, il n'est pas demandé de justifier les réponses.*

Donner un sous-espace vectoriel de E (autre que E et $\{0_E\}$) dans les cas suivants :

(a) $E = \mathbb{R}^4$

Par exemple : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + z + t = 0\}$.

(b) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Par exemple : $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ f(0) = 0\}$

(c) $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n) \text{ converge}\}$

Par exemple : $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n) \text{ converge vers } \ 0\}$

Exercice 7 : espaces vectoriels 2

Les deux questions sont indépendantes.

1. *Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels*

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 0\} \ \text{ et } G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = y\}$$

(a) *A-t-on $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$? Justifier.*

Le vecteur $u = (0, 0, 15) \in F \cap G$. Donc $F \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

(b) *Rappeler la définition mathématique de l'ensemble $F + G$.*

$$F + G = \{u \in E \text{ tel que } \exists\,(u_1, u_2) \in F \times G \text{ tel que } u = u_1 + u_2\}$$

(c) *Le vecteur $u = (1, 2, 3)$ appartient-il à $F + G$? Justifier.*

On a, par exemple, $u = (1, 2, 3) = u_1 + u_2$ avec $u_1 = (0, 1, 6)\$ \in F$ et $u_2 = (1, 1, -3) \in G$. Donc on a bien $u \in F + G$.

(d) *La décomposition que vous avez trouvé est-elle unique ? Justifier. Pourquoi en étiez-vous certain avant même de faire le moindre calcul ?*

Non, la décomposition ci-dessus n'est pas unique. Par exemple, on a aussi $u = (1, 2, 3) = v_1 + v_2$ avec $v_1 = (0, 1, 0) \in F$ et $v_2 = (1, 1, 3) \in G$. Il y en a une infinité même. On le savait dès la première question car $F \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

2. *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in E^n$ une famille de n vecteurs de E. ($n \in \mathbb{N}^*$)*

(a) *Donner la définition mathématique de : $\mathcal{F}$ est une famille libre de E.*

$$\mathcal{F} \text{ est libre } \iff \forall\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, (\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0)$$

(b) *Donner la définition mathématique de : $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E.*

$$\mathcal{F} \text{ est génératrice de } E \iff \forall\, u \in E,\ \exists\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

(c) *Dans $E = \mathbb{R}^3$, donner un exemple d'une famille libre composée de 2 vecteurs et un exemple d'une famille liée composée de 3 vecteurs. Justification non demandée.*

- Prenons $u_1 = (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ et $u_2 = (0, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$. La famille (u_1, u_2) est libre car ils ne sont pas colinéaires.
- Prenons dans $\mathbb{R}^3$, $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (4, 5, 6)$ et $v_3 = (5, 7, 9)$. La famille (v_1, v_2, v_3) est liée car $v_3 = v_1 + v_2$.

(d) *Dans $E = \mathbb{R}^2$, donner un exemple d'une famille génératrice de E. Justification non demandée.*

La famille $(e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$ car pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $u = xe_1 + ye_2$.