EPITA

Mathématiques

Contrôle S2

durée : 3 heures

Mars 2022

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 35 points. La note sera ramenée à une note sur 20 par une règle de 3

Consignes :

- Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 7 exercices.**
- Vous devez répondre directement sur les feuilles jointes. **Pensez à regarder la taille (souvent surestimée) réservée à la réponse avant de commencer à rédiger.**
- **Un malus d'un point sur la note sur** 20 **sera appliqué aux copies manquant de propreté.**
- Documents et calculatrices interdits.
- Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 (5,5 points)

1. Résoudre sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle (E) $xy' + \dfrac{1}{2}y = -2$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) $2y'' + 8y' + 8y = 3e^{-2x}$

Exercice 2 (5 points)

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

1. Soient f et g deux fonctions telles qu'au voisinage de 0 :

$$f(x) = o(x^3) \quad \text{et} \quad g(x) = x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec} \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

   (a) A t-on $f(x) = o(x^2)$ au voisinage de 0 ? $f(x) = o(x^4)$ au voisinage de 0 ? Justifier.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (b) Déterminer le plus grand entier naturel n pour lequel on peut affirmer que $f(x) - 2g(x) = o(x^n)$ au voisinage de 0.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Soient f et g deux fonctions telles qu'au voisinage de 0 :

$$f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^3) \quad \text{et} \quad g(x) = 2x + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

   Donner des équivalents simples en 0 de : $f(x)$, $g(x)$ et $2xf(x) - g(x)$.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. Proposer un développement limité en 0 à l'ordre 3 d'une fonction h non nulle qui vérifierait en 0 :

$$h(x) \sim -3x \quad \text{et} \quad h(x) + 3x \sim 5x^2$$

   ....
   ....

4. Proposer un développement limité en 0 à l'ordre 4 d'une fonction i non nulle qui vérifierait en 0 :

$$i(x) = o(x^3) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{i(x)}{x^4} = 2$$

   ....
   ....

Exercice 3 (5 points)

Dans cet exercice, vous prendrez soin de mettre en évidence les développements limités usuels que vous utiliserez au fur et à mesure.

1. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $f(x) = \sin(2x)e^{-x}$.

2. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $g(x) = \ln(1 + x + \cos(x))$.

Exercice 4 (5 points)

1. Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x^2}-\cos\left(2x^2\right)-x^2}{e^{-x}+\sin(x)-1}$

2. Calculer $\lim_{x\to +\infty} \left(x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$.

Exercice 5 (6 points)

Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ? Justifiez rigoureusement votre réponse.

1. $E = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \geq -1\right\}$.

2. $F = \left\{u \in \mathbb{R}^3,\ u = \alpha\, e_1 + \beta\, e_2 ; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$ où $e_1 = (1, 1, 0)$ et $e_2 = (0, 5, 3)$.

3. $G = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = o(x) \text{ au voisinage de } 0\}$

Exercice 6 (4,5 points)

Soit un entier $n \geq 5$. On considère le polynôme $P_n(X) = X^{n+1} - 2X^n + 2X^{n-1} - 2X^{n-2} + X^{n-3}$.

1. Vérifier que 0 est une racine de P et donner, sans calcul, son ordre exact de multiplicité en justifiant.

2. Montrer que 1 est une racine de P. Trouver son ordre exact de multiplicité.

3. On prend dans cette question $n = 11$. Ainsi, $P_{11}(X) = X^{12} - 2X^{11} + 2X^{10} - 2X^9 + X^8$. En vous aidant des questions précédentes, trouver la factorisation de P_{11} en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 7 (4 points)

Le but de l'exercice est de trouver tous les polynômes P de degré 3 tels que $(X-1)^2|P(X)-1$ et $(X+1)^2|P(X)+1$.

Considérons pour cela $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant l'hypothèse :

$$(H) \ : \ (X-1)^2|P(X)-1 \ \text{ et } \ (X+1)^2|P(X)+1$$

Introduisons aussi les deux polynômes : $A(X) = P(X) - 1$ et $B(X) = P(X) + 1$.

1. Citer **toutes** les informations concernant les polynômes A et B que l'on peut déduire de (H) ?

....
....
....
....
....

2. En déduire $P(1)$, $P'(1)$, $P(-1)$ et $P'(-1)$.

....
....
....
....
....

3. En déduire tous les polynômes P de degré 3 vérifiant (H).

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....