CORRECTION MIDTERM S2

Exercice 1

1. *Résoudre sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle (E) $xy' + \dfrac{1}{2}y = -2$.*

   • Étape 1 : Résolution de (E_0) $xy' + \frac{1}{2}y = 0$
   On a
   $$y_0(x) = ke^{-\int \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x} = ke^{-\frac{1}{2}\ln(x)} = \frac{k}{\sqrt{x}}; \quad k \in \mathbb{R}$$

   • Étape 2 : Recherche d'une solution particulière de (E). $y_p : x \longmapsto -4$ est une solution évidente.

   • Étape 3 : conclusion
   $$S = \left\{ \begin{array}{lll} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{k}{\sqrt{x}} - 4 \end{array} ; k \in \mathbb{R} \right\}$$

2. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) $2y'' + 8y' + 8y = 3e^{-2x}$*

   • Étape 1 : Résolution de (E_0) $2y'' + 8y' + 8y = 0$
   L'équation caractéristique est (C) $2r^2 + 8r + 8 = 0 = 2(r+2)^2$.
   D'où
   $$y_0(x) = (k_1 x + k_2)e^{-2x} \quad (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$$

   • Étape 2 : Recherche d'une solution particulière de (E). On la cherche sous la forme $y_p(x) = Q(x)e^{-2x}$. On a alors $y_p'(x) = (Q'(x) - 2Q(x))\,e^{-2x}$ et $y_p''(x) = (Q''(x) - 4Q'(x) + 4Q(x))\,e^{-2x}$.
   En réinjectant dans (E), on obtient après calculs, $y_p(x)$ solution particulière de $(E) \iff 2Q''(x) = 3$. On peut donc choisir $Q'(x) = \dfrac{3}{2}x$ et $Q(x) = \frac{3x^2}{4}$. Par conséquent, $y_p(x) = \dfrac{3x^2}{4}e^{-2x}$.

   • Étape 3 : conclusion
   $$S = \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (k_1 x + k_2)e^{-2x} + \frac{3x^2}{4}e^{-2x} \end{array} ; (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exercice 2

1. *Soient f et g deux fonctions telles qu'au voisinage de 0 :*
   $$f(x) = o(x^3) \quad \textit{et} \quad g(x) = x^2\varepsilon(x) \quad \textit{avec} \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

   (a) *A t-on $f(x) = o(x^2)$ au voisinage de 0 ? $f(x) = o(x^4)$ au voisinage de 0 ? Justifier.*

   Comme, $f(x) = x^3\phi(x)$ avec $\phi(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a alors $f(x) = x^2\,(x\phi(x))$ avec $x\phi(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, $f(x) = o(x^2)$. En revanche, on ne peut pas dire que $f(x) = o(x^4)$.

   (b) *Déterminer le plus grand entier naturel n pour lequel on peut affirmer que $f(x) - 2g(x) = o(x^n)$ au voisinage de 0.*

   On a $f(x) - 2g(x) = x^3\phi(x) - 2x^2\varepsilon(x) = x^2\,(x\phi(x) - 2\varepsilon(x))$ avec $x\phi(x) - 2\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
   Donc, $f(x) - 2g(x) = o(x^2)$ (pas mieux).

2. *Soient f et g deux fonctions telles qu'au voisinage de 0 :*
   $$f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^3) \quad \textit{et} \quad g(x) = 2x + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

   Donner des équivalents simples en 0 de : $f(x)$, $g(x)$ et $2xf(x) - g(x)$.

   On a $f(x) \sim 1$ et $g(x) \sim 2x$.
   De plus, $2xf(x) - g(x) = 2x + 2x^2 + o(x^2) - 2x - x^2 + o(x^2)$ (inutile d'aller à l'ordre 3). Ainsi, $2xf(x) - g(x) = x^2 + o(x^2)$.
   Donc, $2xf(x) - g(x) \sim x^2$

3. *Proposer un développement limité en 0 à l'ordre 3 d'une fonction h non nulle qui vérifierait en 0 :*
$$h(x) \sim -3x \quad et \quad h(x) + 3x \sim 5x^2$$
Par exemple, $h(x) = -3x + 5x^2 + \pi x^3 + o(x^3)$. En fait, on pouvait prendre ce qu'on voulait pour le coefficient de x^3.
4. *Proposer un développement limité en 0 à l'ordre 4 d'une fonction i non nulle qui vérifierait en 0 :*
$$i(x) = o(x^3) \quad et \quad \lim_{x\to 0} \frac{i(x)}{x^4} = 2$$
Il n'y avait qu'une réponse : $i(x) = 2x^4 + o(x^4)$.

Exercice 3

Dans cet exercice, vous prendrez soin de mettre en évidence les développements limités usuels que vous utiliserez au fur et à mesure.

1. *Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $f(x) = \sin(2x)e^{-x}$.*
On a
$$\begin{aligned} f(x) &= \left(2x - \tfrac{(2x)^3}{6} + o(x^3)\right) \times \left(1 - x + \tfrac{(-x)^2}{2} + \tfrac{(-x)^3}{6} + o(x^3)\right) \\ &= \left(2x - \tfrac{4x^3}{3} + o(x^3)\right) \times \left(1 - x + \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\ &= 2x - 2x^2 + x^3 - \tfrac{4x^3}{3} + o(x^3) \\ &= 2x - 2x^2 - \tfrac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$
2. *Donner le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $g(x) = \ln(1 + x + \cos(x))$.*
On a
$$\begin{aligned} g(x) &= \ln\left(1 + x + 1 - \tfrac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \\ &= \ln\left(2 + x - \tfrac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \\ &= \ln\left(2\left(1 + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{4} + o(x^3)\right)\right) \\ &= \ln(2) + \ln\left(1 + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{4} + o(x^3)\right) \end{aligned}$$
Posons $u = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + o(x^3) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. On a alors : $u^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)$ et $u^3 = \frac{x^3}{8} + o(x^3)$. Comme en 0, $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$, on obtient
$$g(x) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{8} + \frac{x^3}{24} + o(x^3) = \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{8} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Exercice 4

1. *Calculer* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x^2} - \cos\left(2x^2\right) - x^2}{e^{-x} + \sin(x) - 1}$
   - $N(x) = \sqrt{1+2x^2} - \cos\left(2x^2\right) - x^2 = 1 + \dfrac{1}{2}(2x^2) + \dfrac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}(4x^4) + o(x^4) - \left(1 - \dfrac{4x^4}{2} + o(x^4)\right) - x^2.$
   Ainsi, $N(x) = -\dfrac{x^4}{2} + 2x^4 + o(x^4) = \dfrac{3x^4}{2} + o(x^4)$. On en déduit que $N(x) \sim \dfrac{3x^4}{2}$.
   - $D(x) = e^{-x} + \sin(x) - 1 = 1 - x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) + x + o(x^2) - 1 = \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$. Ainsi, $D(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$.
   - On en déduit alors que $\dfrac{N(x)}{D(x)} \sim \dfrac{\frac{3x^4}{2}}{\frac{x^2}{2}} = 3x^2$. Comme $3x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x^2} - \cos\left(2x^2\right) - x^2}{e^{-x} + \sin(x) - 1} = 0$
2. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}$.

$$\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2} = e^{x^2\ln\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = e^{x^2\ln\left(x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right)} = e^{x^2\ln\left(1 - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} = e^{x^2\left(-\frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)} = e^{-\frac{1}{6} + o(1)}$$
Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2} = e^{-\frac{1}{6}}$.

Exercice 5

Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ? Justifiez rigoureusement votre réponse.

1. $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq -1\}$.

   Prenons $(u_n) = (2)$. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 \geq -1$. Donc $(u_n) \in E$.
   En revanche pour $(v_n) = -(u_n) = (-2)$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n < -1$. Donc $(v_n) \notin E$.
   E n'est donc pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. $F = \{u \in \mathbb{R}^3,\, u = \alpha\, e_1 + \beta\, e_2; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ où $e_1 = (1, 1, 0)$ et $e_2 = (0, 5, 3)$.

   • De par sa définition, $F \subset \mathbb{R}^3$. De plus, $0_{\mathbb{R}^3} = 0e_1 + 0e_2$. D'où, $0_{\mathbb{R}^3} \in F$.
   • Soient $(u, v) \in F^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On sait alors que : $u = ae_2 + be_2$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $v = a'e_1 + b'e_2$ avec $(a', b') \in \mathbb{R}^2$. Ainsi, $\alpha u + v = (\alpha a + a')\, e_1 + (\alpha b + b')\, e_2$. Comme $\alpha a + a' \in \mathbb{R}$ et $\alpha b + b' \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\alpha u + v \in F$.
   • Ainsi, F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. C'est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3. $G = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = o(x) \text{ au voisinage de } 0\}$

   • De par sa définition, $G \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. De plus, $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}} \in F$.
   • Soient $(f, g) \in G^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On sait alors que : $f(x) = o(x) = x\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $g(x) = o(x) = x\phi(x)$ avec $\phi(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, $\alpha u + v = x\,(\alpha\varepsilon(x) + \phi(x))$. Comme $\alpha\varepsilon(x) + \phi(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $\alpha f + g \in G$.
   • Ainsi, G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. C'est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 6

Soit un entier $n \geq 5$. On considère le polynôme $P_n(X) = X^{n+1} - 2X^n + 2X^{n-1} - 2X^{n-2} + X^{n-3}$.

1. *Vérifier que 0 est une racine de P et donner, sans calcul, son ordre exact de multiplicité en justifiant.*

   On a $P_n(X) = X^{n-3}\left(X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1\right) = X^{n-3}Q(X)$. Comme $Q(0) = 1 \neq 0$, on en déduit que $X^{n-3} \mid P_n$ et X^{n-2} ne divise pas P_n. Ainsi, 0 est bien une racine de P_n d'ordre de multiplicité exactement égal à $n - 3$.

2. *Montrer que 1 est une racine de P. Trouver son ordre exact de multiplicité.*

   Il suffit de montrer que 1 est une racine de Q et de trouver sa multiplicité.
   On a $Q(1) = 1 - 2 + 2 - 2 + 1 = 0$. De plus, $Q'(X) = 4X^3 - 6X^2 + 4X - 2$. D'où, $Q'(1) = 4 - 6 + 4 - 2 = 0$. Et, $Q''(X) = 12X^2 - 12X + 4$. D'où, $Q''(1) = 12 - 12 + 4 = 4 \neq 0$.
   1 est donc une racine de Q (donc de P_n) d'ordre 2 exactement.

3. *On prend dans cette question $n = 11$. Ainsi, $P_{11}(X) = X^{12} - 2X^{11} + 2X^{10} - 2X^9 + X^8$. En vous aidant des questions précédentes, trouver la factorisation de P_{11} en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.*

   On a $P_{11}(X) = X^8Q(X)$ et $(X - 1)^2 \mid Q$. On pose alors la division euclidienne de Q par $(X - 1)^2 = X^2 - 2X + 1$. On trouve : $Q(X) = \left(X^2 - 2X + 1\right)\left(X^2 + 1\right)$. Le polynôme $X^2 + 1$ ayant un discriminant strictement négatif, il est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.
   En conclusion, on obtient alors la factorisation suivante de $P_{11}(X)$ en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$:

   $$P_{11}(X) = X^8(X - 1)^2(X^2 + 1)$$

Exercice 7

Le but de l'exercice est de trouver tous les polynômes P de degré 3 tels que $(X - 1)^2 | P(X) - 1$ et $(X + 1)^2 | P(X) + 1$.

Considérons pour cela $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant l'hypothèse :

$$(H) \;:\; (X - 1)^2 | P(X) - 1 \;\text{ et }\; (X + 1)^2 | P(X) + 1$$

Introduisons aussi les deux polynômes : $A(X) = P(X) - 1$ et $B(X) = P(X) + 1$.

1. *Citer* **toutes** *les informations concernant les polynômes A et B que l'on peut déduire de (H) ?*

   Pour A, on a $(X-1)^2 \mid A$ ainsi, $A(1) = A'(1) = 0$.
   Pour B, on a $(X+1)^2 \mid A$ ainsi, $B(-1) = B'(-1) = 0$.

2. *En déduire $P(1)$, $P'(1)$, $P(-1)$ et $P'(-1)$.*

   On remarque que $A'(X) = B'(X) = P'(X)$. Ainsi, de la question précédente, on a $P(1) = 1$, $P(-1) = -1$, $P'(1) = 0$ et $P'(-1) = 0$.

3. *En déduire tous les polynômes P de degré 3 vérifiant (H).*

   $$P \text{ vérifie } (H) \iff \begin{cases} P'(1) = 0 \\ P'(-1) = 0 \\ P(1) = 1 \\ P(-1) = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 3a - 2b + c = 0 \\ a + b + c + d = 1 \\ -a + b - c + d = -1 \end{cases}$$

   $L_1 - L_2$ donne $b = 0$ et $L_1 + L_2$ donne $c = -3a$. $L_3 + L_4$ donne $2b + 2d = 0$ et $L_3 - L_4$ donne $2a + 2c = 2$. D'où,

   $$P \text{ vérifie } (H) \iff \begin{cases} b = 0 \\ c = -3a \\ 2b + 2d = 0 \\ 2a + 2c = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ d = 0 \\ a = -1/2 \\ c = 3/2 \end{cases}$$

   Il n'y a donc qu'un seul polynôme vérifiant (H) : $P(X) = -\dfrac{X^3}{2} + \dfrac{3X}{2}$.