

EPITA

Mathématiques S2

Contrôle de mi-semester

Mars 2021

Durée : 3 heures

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème indiqué est sur 30 points qui seront ramenés à 20 par une règle de trois.

Consignes :

- Documents et calculatrices interdits.
 - Répondre directement sur les feuilles jointes, dans les espaces prévus. Aucune autre feuille ne sera corrigée.
 - Ne pas écrire au crayon de papier.
-

Exercice 1 (4 points)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. (E_1) $(t + 3)y' + y = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ sur \mathbb{R}_+^* en cherchant une solution particulière grâce à une variation de la constante.

- b. (E_2) $y' + y = \cos(t) + 2 \sin(t)$ sur \mathbb{R}
en cherchant une solution particulière de la forme $y_p = a \cos(t) + b \sin(t)$ ($a, b \in \mathbb{R}^2$).

Exercice 2 (3 points)

- a. Montrer, en rédigeant soigneusement votre réponse, que l'équation (E) : $x^3 - 3x + 6 = 0$ admet une solution sur l'intervalle $] -3, 3[$.

b. Établir le tableau de variation de $f(x) = x^3 - 3x + 6$ sur $[-3, 3]$.

En déduire que cette racine est unique et en donner un encadrement entre deux entiers consécutifs.

Exercice 3 (6 points)

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en zéro de $f(x) = e^x (1+x)^{-\frac{1}{2}}$

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en zéro de $g(x) = \ln(1 + \cos(x))$.

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + 2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x$ en détaillant chaque étape de calcul.

Exercice 4 (4 points)

- a. Soit $E = \mathbb{R}^2$. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ? Justifiez vos réponses par une démonstration en cas de réponse positive, en montrant précisément ce qui ne marche pas sinon.

A : Le singleton $A = \{O_E\}$

B : Demi-plan $y \geq 0$: $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0\}$

C : Droite $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - 2y = 0\}$

D : Droite $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - 2y = 1\}$

- b. Citer, sans démonstration, les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 .

Exercice 5 (3 points)

On pose $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(a, b, 0); (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$, $G = \{(c, c, c), c \in \mathbb{R}\}$, deux sous-espaces vectoriels de E .
Rappeler à quelles conditions F et G sont supplémentaires dans E puis montrer que $F \oplus G = E$.

Exercice 6 (3 points)

Soit $\mathcal{F} = \{u = (1, 1, 0); v = (0, 1, 1); w = (1, 0, 1)\}$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^3 .

- a. Montrer que \mathcal{F} est une base de \mathbb{R}^3 .

- b. Donner les coordonnées du vecteur $(1, 3, 0)$ dans la base \mathcal{F} .

Exercice 7 (3 points)

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$. Soient F et G les deux sous-espaces vectoriels de E définis par :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y - z = 0 \text{ et } x + y - z = 0\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(\{(1, -1, 0, 1); (-2, 2, 0, -2)\})$$

- a. Écrire F sous forme de Vect.

- b. Déterminer les dimensions de F et G en justifiant soigneusement vos réponses.

Exercice 8 (4 points)

Pour chacune des familles de vecteurs suivantes, montrer si la famille est libre ou liée.

$$\mathcal{F}_1 = \{P, Q, R\} \text{ dans } \mathbb{R}[X] \text{ où : } P(X) = -X^3 + X^2 + 2X - 2; \quad Q(X) = 2X^3 - X + 3, \quad R(X) = 2X^2 + 3X - 1,$$

$$\mathcal{F}_2 = \{(u_n), (v_n), (w_n)\} \text{ dans } \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ où : } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = n, v_n = 2^n \text{ et } w_n = \frac{n}{n+1}.$$