

Corrigé du contrôle 2

Exercice 1 (4,5 points)

1. En posant $u(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ et $v'(x) = 1$, on a $v(x) = x$ et

$$u'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \times \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\text{Donc } I = \left[x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(1 + \sqrt{2}) - \left[\sqrt{x^2 + 1} \right]_0^1.$$

$$\text{Ainsi } I = 1 - \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}).$$

2. En posant $u = \sqrt{t}$, on a $t = u^2$ donc $dt = 2u du$.

$$\text{Ainsi } J = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2u}{u + u^3} du = 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{du}{1 + u^2}$$

$$\text{donc } J = 2 \left[\arctan(u) \right]_1^{\sqrt{3}} = 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

3. En posant $u = \ln(t)$, on a $du = \frac{dt}{t}$.

$$\text{Ainsi } K = \int_0^1 \frac{u}{1 + u^2} du = \frac{1}{2} \left[\ln(1 + u^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln(2).$$

Exercice 2 (2 points)

1. On peut en conclure que $(w_n) = (u_n + v_n)$ est divergente. En effet supposons par l'absurde que (w_n) converge alors $(v_n) = (w_n - u_n)$ convergerait (comme somme de deux suites convergentes) ce qui contredit l'hypothèse.
2. On ne peut rien conclure comme l'illustrent les 2 exemples suivants :

$$(u_n) = (n) \text{ et } (v_n) = (1 - n). (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ divergent et } (u_n + v_n) = (1) \text{ converge.}$$
$$(u_n) = (n) \text{ et } (v_n) = (e^n). (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ divergent et } (u_n + v_n) = (n + e^n) \text{ diverge.}$$

Exercice 3 (3,5 points)

1. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n.$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \leq 1$, donc (u_n) est décroissante.

Comme de plus la suite réelle (u_n) est minorée par 0, elle est convergente.

3. $u_n = \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n} \times \dots \times \frac{2}{n} \times \frac{1}{n}.$

Comme les $n-1$ premiers termes positifs de ce produit sont inférieurs ou égaux à 1, on a $u_n \leq \frac{1}{n}.$

4. On a donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ donc (u_n) converge vers 0.

Exercice 4 (2 points)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n}$$

u_n est donc la somme de n termes dont le plus grand est $\frac{1}{n^2+1}$. Ainsi

$$0 \leq u_n \leq \frac{n}{n^2+1}$$

Or

$$\frac{n}{n^2+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc, via le théorème des gendarmes, (u_n) converge vers 0.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$nu_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$$

nu_n est donc la somme de n termes dont le plus grand est $\frac{n}{n^2+1}$ et le plus petit est $\frac{n}{n^2+n}$. Ainsi

$$\frac{n^2}{n^2+n} \leq nu_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$$

Or

$$\frac{n^2}{n^2+n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

et

$$\frac{n^2}{n^2+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Donc, via le théorème des gendarmes, (nu_n) converge vers 1.

Exercice 5 (3 points)

$$1. n^2 \left(\sqrt{1 + \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} - 1 \right) = n^2 \left(\left(1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)^{1/2} - 1 \right) = n^2 \left(1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 \right).$$

$$\text{Donc } n^2 \left(\sqrt{1 + \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} - 1 \right) = \frac{1}{2} + o(1).$$

$$\text{Ainsi, } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\sqrt{1 + \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} - 1 \right) = \frac{1}{2}.$$

$$2. \left(\ln \left(e + \frac{1}{n} \right) \right)^n = e^{n \ln(\ln(e + \frac{1}{n}))} = e^{n \ln[\ln(e) + \ln(1 + \frac{1}{en})]}.$$

$$\text{Donc } \left(\ln \left(e + \frac{1}{n} \right) \right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{en} + o(\frac{1}{en}))} = e^{n(\frac{1}{en} + o(\frac{1}{en}))} = e^{\frac{1}{e} + o(1)}.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(e + \frac{1}{n} \right) \right)^n = e^{\frac{1}{e}}.$$

Exercice 6 (3 points)

Soit $n \geq 1$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0 \text{ donc } (u_n) \text{ est croissante.}$$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2}$$

$$\text{soit encore } v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{n(n+1)^2} \leq 0 \text{ donc } (v_n) \text{ est décroissante.}$$

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 7 (3 points)

1. E est un \mathbb{R} -ev car c'est un sev du \mathbb{R} -ev $\mathbb{R}[X]$.

En effet, $E \subset \mathbb{R}[X]$, $E \neq \emptyset$ puisque le polynôme nul est dans E .

D'autre part, si $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda P + Q \in E$ car

$$(\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = \lambda P'(2) + Q'(2) = (\lambda P + Q)'(2)$$

2. F est un \mathbb{R} -ev car c'est un sev du \mathbb{R} -ev \mathbb{R}^2 .

En effet, $E \subset \mathbb{R}^2$, $E \neq \emptyset$ puisque le vecteur nul $(0, 0)$ est dans E .

D'autre part, si $(u = (x, y), v = (x', y')) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y') \in F$ car

$$\sqrt{\pi}(\lambda x + x') - \ln(3)(\lambda y + y') = \lambda(\sqrt{\pi}x - \ln(3)y) + \sqrt{\pi}x' - \ln(3)y' = 0$$

3. G n'est pas un \mathbb{R} -ev car par exemple $(u_n) = ((-1)^n) \in G$, $(v_n) = (1 - (-1)^n) \in G$ mais $(u_n) + (v_n)$ qui est la suite constante égale à 1 n'est pas dans G .