Contrôle 2

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Nom : **Prénom :** **Classe :**

Entourer votre professeur de TD : Mme Boudin / Mme Daadaa / M. Ghanem / M. Goron / Mme Trémoulet

Consignes :

– vous devez répondre directement sur les feuilles jointes.

– ***aucune autre feuille, que celles agrafées fournies pour répondre, ne sera corrigée.***

– aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

– toute personne ne respectant pas ces consignes se verra attribuer la note 00/ 20.

Exercice 1 (4,5 points)

1. Via une double intégration par parties, calculer $I = \displaystyle\int_1^e \sin\big(\ln(x)\big)\,dx$.

2. Via une intégration par parties, calculer $J = \int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Via le changement de variable $u = \sqrt{x}$ puis une intégration par parties, calculer $K = \int_0^{\pi^2} \cos\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

Exercice 2 (3 points)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles strictement positives telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

1. Montrer que si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2. Montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 3 (3 points)

Encadrer le numéro des questions contenant les énoncés vrais.
Contrairement à d'habitude, ***les réponses erronées ne retirent pas de point***!

1. Soient (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Alors l'assertion « si (u_n) converge vers ℓ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell$ » est équivalente à l'assertion « s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > \ell$, alors (u_n) ne converge pas vers ℓ ».
2. Si (u_n) est une suite géométrique non nulle de raison $q \in \mathbb{R}^*$, alors $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{q}$.
3. Si (u_n) est une suite réelle bornée, il existe une suite extraite de (u_n) convergente.
4. Soit (u_n) une suite réelle. Alors (u_{6n}) est extraite de (u_{2n}).
5. Soit (u_n) une suite réelle. Alors $(u_{3.2^{n+1}})$ est extraite de (u_{6n}).
6. Rien de ce qui précède.

Exercice 4 (3 points)

Soient (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{(4n+4)!}$.

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 5 (2 points)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{n^2}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer (sans récurrence) que $\ln(n!) \leqslant n\ln(n)$.

2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 6 (5,5 points)

Soit (u_n) la suite réelle définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Que vaut la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Via la question précédente, montrer (sans récurrence), que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant 2$. Montrer (sans récurrence) que $\dfrac{1}{k!} = \dfrac{1}{2 \times 3 \times \cdots \times k} \leqslant \dfrac{1}{2^{k-1}}$.

   Vérifier que l'inégalité est encore vraie pour $k = 1$.

4. Montrer que (u_n) est croissante.

5. Montrer (sans récurrence), via les questions 2 et 3, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 3$.

6. (u_n) est-elle convergente ? Justifier votre réponse.