EPITA

Mathématiques

Contrôle (S2)

mars 2018

Nom :

Prénom :

Entourer le nom de votre professeur de TD : Mme Boudin / Mme Daadaa / M. Ghanem / M. Goron / Mme Trémoulet

Classe :

NOTE :

Contrôle

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Consignes :

– vous devez répondre directement sur les feuilles jointes.

– ***aucune autre feuille, que celles agrafées fournies pour répondre, ne sera corrigée.***

– aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

– toute personne ne respectant pas ces consignes se verra attribuer la note 00/20.

Exercice 1 (4,5 points)

1. Via une intégration par parties, calculer $I = \int_0^1 \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$.

2. Via le changement de variable $u = \sqrt{t}$, déterminer $J = \displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}}$.

1

3. Via le changement de variable $u = \ln(t)$ déterminer $K = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln(t)}{t(1 + \ln^2(t))}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 (2 points)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

1. On suppose (u_n) convergente et (v_n) divergente. Peut-on conclure quant à la convergence ou la divergence de $(u_n + v_n)$? Justifier votre réponse.

2. On suppose (u_n) et (v_n) divergentes. Peut-on conclure quant à la convergence ou la divergence de $(u_n + v_n)$? Justifier votre réponse.

Exercice 3 (3,5 points)

Soit (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

1. Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{an}{bn+1}\right)^n$ où a et b sont deux entiers à déterminer.

2. En déduire la monotonie de (u_n). Peut-on en conclure que (u_n) est convergente ? Justifier votre réponse.

3. Montrer (sans récurrence) que $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

4. En déduire la limite de (u_n).

Exercice 4 (2 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k}$.

1. Montrer que (u_n) est convergente en précisant sa limite.

2. Montrer que (nu_n) est convergente en précisant sa limite.

Exercice 5 (3 points)

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\sqrt{1+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}-1\right)$.

2. $\lim_{n\to+\infty} \left(\ln\left(e+\frac{1}{n}\right)\right)^n$.

Exercice 6 (3 points)

Soient (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 7 (3 points)

Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-ev ? Justifiez votre réponse.

1. $E = \{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = P'(2)\}$.

2. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{\pi}\,x - \ln(3)y = 0\}$.

3. $G = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n) \text{ n'a pas de limite}\}$.