

S2 B4 Correction Examen EV

Exercice 1 : sev ou pas

Les ensembles suivants sont-ils des \mathbb{R} -espaces vectoriels ?

1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y = 0 \text{ et } y - z^2 = 0\}$.

Prenons $u = (1, 1, 1)$. On a $u \in E$. Or $2 \cdot u = (2, 2, 2) \notin E$ car $2 - 2^2 = -2 \neq 0$. La multiplication externe n'est pas stable dans E . Donc E n'est pas un \mathbb{R} -espace vectoriel.

2. $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha 2^n + \beta 3^n\}$.

$F = \text{Vect}((2^n), (3^n))$ donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. F est donc un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Exercice 2 : bases ou pas

On se place dans \mathbb{R}^3 . On considère les familles suivantes :

$$\mathcal{F}_1 = (u_1 = (1, -1, 2), u_2 = (1, -2, 1), u_3 = (-1, 3, 0)) \text{ et } \mathcal{F}_2 = (v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (2, 2, 1), v_3 = (2, 3, 2))$$

\mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont-elles des bases de \mathbb{R}^3 ?

- Pour \mathcal{F}_1 , on remarque que $u_1 - 2u_2 = u_3$, la famille est liée. \mathcal{F}_1 n'est donc pas une base de \mathbb{R}^3 .
- Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a alors :

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 & (L_1) \\ \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 & (L_2) \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0 & (L_3) \end{cases}$$

$L_2 - L_1$ donne $\gamma = 0$ et $L_3 - L_1$ donne $-\beta = 0$. Ainsi, $\alpha = \beta = \gamma = 0$. \mathcal{F}_2 est donc une famille libre.

Or $\text{Card}(\mathcal{F}_2) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, donc \mathcal{F}_2 libre $\implies \mathcal{F}_2$ génératrice de \mathbb{R}^3 .

\mathcal{F}_2 est donc une base de \mathbb{R}^3 .

Exercice 3 : coordonnées

1. On se place dans $E = \mathbb{R}_2[X]$. On considère la base $\mathcal{B} = (P_1 = 1 - X, P_2 = 1 + X, P_3 = (1 + X)^2)$ de E .

(a) Soit $P \in E$ dont les coordonnées dans \mathcal{B} sont $(1, 2, -1)$. Trouver les coordonnées de P dans la base canonique de E .

$$\text{On a } P = 1P_1 + 2P_2 - 1P_3 = 1 - X + 2(1 + X) - (1 + X)^2 = 1 - X + 2 + 2X - 1 - 2X - X^2 = 2 - X - X^2.$$

Les coordonnées de P dans la base canonique de E sont donc $(2, -1, -1)$.

(b) Soit $Q = 2X^2 + 1$. Donner les coordonnées de Q d'une part dans la base canonique de E , d'autre part, dans \mathcal{B} .

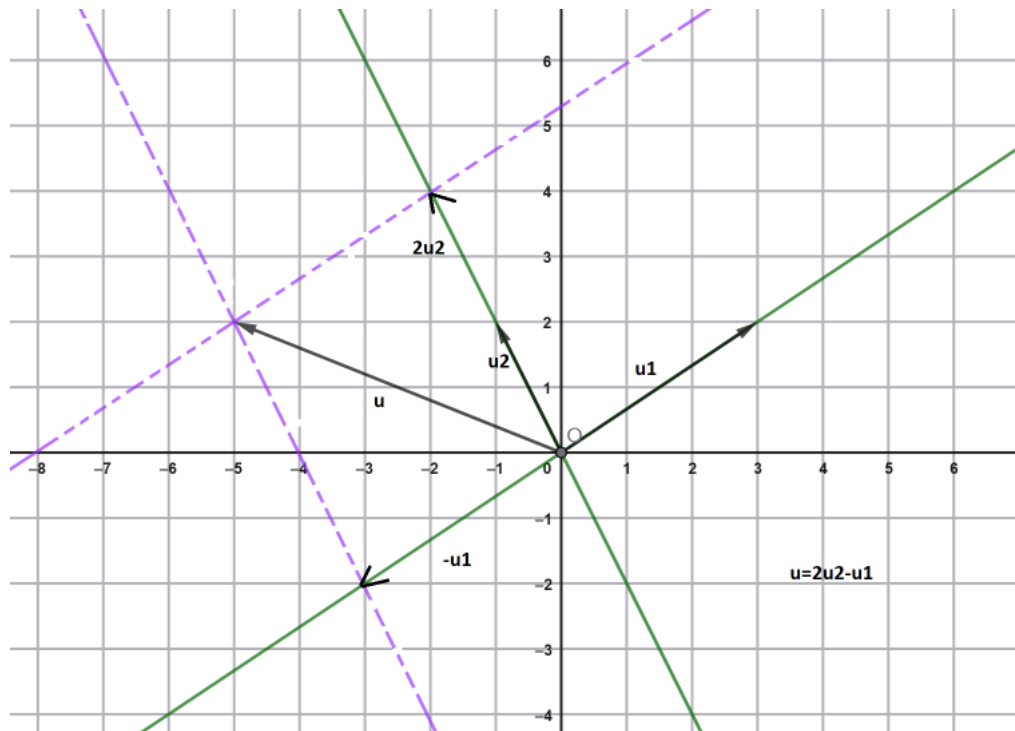
- Les coordonnées de Q dans la base canonique de E sont $(1, 0, 2)$.
- Cherchons $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = 2X^2 + 1$. En remplaçant et après développement, on a $\alpha - \alpha X + \beta + \beta X + \gamma + 2\gamma X + \gamma X^2 = 2X^2 + 1$. Or deux polynômes sont égaux ssi leurs coefficients sont égaux. On en déduit que

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ -\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \gamma = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ -\alpha + \beta = -4 \\ \gamma = 2 \end{cases} \iff \alpha = \frac{3}{2}, \beta = -\frac{5}{2}, \gamma = 2$$

Ainsi, les coordonnées de Q dans la base \mathcal{B} sont $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, 2\right)$.

2. Dans $E = \mathbb{R}^2$, on considère la base $\mathcal{B} = (u_1 = (3, 2), u_2 = (-1, 2))$.

- (a) Ci dessous, dessiner les deux repères (avec 2 carreaux = 1 unité) formés d'une part, par la base canonique de \mathbb{R}^2 , d'autre part, par \mathcal{B} . Soit $u = (-5, 2)$. Trouver graphiquement les coordonnées de u dans la base \mathcal{B} . **Vous ferez apparaître vos traits de construction.**



Graphiquement, les coordonnées de u dans \mathcal{B} sont : $(-1, 2)$

- (b) Vérifier par le calcul ce que vous avez trouvé dans la question précédente.

$$-u_1 + 2u_2 = -(3, 2) + 2(-1, 2) = (-3 - 2, -2 + 4) = (-5, 2).$$

Exercice 4 : sev engendrés

Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on considère les sous-espaces vectoriels :

$$F = \text{Vect}(X^2 + X) \text{ et } G = \text{Vect}(X^2, X)$$

1. Donner un vecteur appartenant à F et un vecteur n'appartenant pas à F . Ne pas justifier.

$$P = 2(X^2 + X) \in F \text{ et } Q = 2X^2 + 3X \notin F.$$

2. Donner un vecteur appartenant à G et un vecteur n'appartenant pas à G . Ne pas justifier.

$$Q = 2X^2 + 3X \in G \text{ et } R = 2X^2 + 3X + 2 \notin G.$$

3. A t-on $F \subset G$? $G \subset F$?

- Comme $Q \in G$ et $Q \notin F$, on a $G \not\subset F$.
- Soit $P \in F$. Alors, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P = \alpha(X^2 + X)$. Ainsi, $P = \alpha X^2 + \alpha X$ d'où $P \in G$. Cela montre que $F \subset G$.

4. Trouver la dimension de F et la dimension de G .

- Par définition, $(X^2 + X)$ est une famille génératrice de F . Or ce polynôme n'étant pas nul, il constitue une famille libre.

Ainsi, $(X^2 + X)$ est une base de F . Donc, $\dim(F) = 1$.

- Par définition, (X^2, X) est une famille génératrice de G . Or ces deux polynômes ne sont pas colinéaires, ils constituent une famille libre.

Ainsi, (X^2, X) est une base de G . Donc, $\dim(G) = 2$.

Exercice 5 : sev supplémentaires ?

On se place dans $E = \mathbb{R}^3$. On considère les deux sous-espaces vectoriels :

- F est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $u_1 = (1, 2, -1)$ et $u_2 = (-2, -4, 2)$.
- $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x + y = 0\}$.

1. Trouver rigoureusement une base de F . En déduire la dimension de F .

$F = \text{Vect}(u_1, u_2) = \text{Vect}(u_1)$ car $u_2 = -2u_1$. Ainsi, (u_1) est une famille génératrice de F .

De plus, $u_1 \neq 0_E \implies (u_1)$ est une famille libre.

(u_1) est donc une base de F et $\dim(F) = 1$.

2. Trouver rigoureusement une base de G . En déduire la dimension de G .

On a $G = \{(x, -2x, z), (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1, -2, 0) + z(0, 0, 1), (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(v_1 = (1, -2, 0), v_2 = (0, 0, 1))$.

Ainsi, (v_1, v_2) est une famille génératrice de G .

Comme v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires, la famille (v_1, v_2) est libre. (v_1, v_2) est donc une base de G et $\dim(G) = 2$.

3. Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$.

Soit $u \in F \cap G$. On a $u \in F$ et $u \in G$. Or $u \in F \implies \exists \alpha \in \mathbb{R}, u = \alpha u_1 = (\alpha, 2\alpha, -\alpha)$. Puisque $u_1 \in G$, on a alors $2\alpha + 2\alpha = 0$, donc $\alpha = 0$. Ainsi, $u = 0_E$ et on a montré : $F \cap G \subset \{0_E\}$. Or, $F \cap G$ étant un sev de E , $\{0_E\} \subset F \cap G$. Donc $F \cap G = \{0_E\}$.

4. Rappeler la définition de $F \oplus G = E$. Est-ce le cas ici ?

On sait que $F \oplus G = E \iff (E = F + G \text{ et } F \cap G = \{0_E\})$.

On sait déjà que $F \cap G = \{0_E\}$.

De plus, $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 1 + 2 - 0 = 3$. Ainsi, $F + G \subset E$ et $\dim(F + G) = \dim(E)$.
Donc $E = F + G$.

On a bien ici $F \oplus G = E$.

5. Proposer F' sous-espace vectoriel de E tel que $F' \cap G \neq \{0_E\}$ mais $F' + G = E$. Vous préciserez ce que représente géométriquement F' mais ne pas justifier votre choix.

Il faut que F' soit un plan vectoriel (différent de G). On peut prendre par exemple $F' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y = 0\}$.

6. Proposer H sous-espace vectoriel de E tel que $H \cap F = \{0_E\}$ mais $H + F \neq E$. Vous préciserez ce que représente géométriquement H mais ne pas justifier votre choix.

Il faut que H soit une droite vectorielle. On peut prendre par exemple $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = 0\}$.