EPITA

Mathématiques

Examen S2-B4-ALM

Applications linéaires et matrices

durée : 2 heures

Mai 2026

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 40 points. La note sera ramenée à une note sur 20 par division par 2.

Consignes :

— Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 5 exercices.**
— **La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
— Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.
— Documents et calculatrices interdits.
— Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 : opérations matricielles (8 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Considérons les deux matrices à coefficients réels : $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Pour chacun des produits suivants, dire (en justifiant) s'il est bien défini ou non. En cas de réponse positive, effectuer le produit.

   (a) AB

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (b) BA

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer AB.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (b) La matrice A est-elle inversible ? Justifier et, si votre réponse est positive, donner A^{-1}.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. (a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -3 & -7 & -14 \end{pmatrix}$. On admet que A est inversible. Trouver A^{-1}. Vous ferez apparaitre tous les détails de vos calculs.

(b) Expliquer comment vous pouvez vérifier le résultat obtenu à la question précédente.

Exercice 2 : application linéaire (10 points)

On considère l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ (a,b,c) & \longmapsto & (a-b)X^2 + (a+b-c)X - 2a + 2b \end{array} \right.$

1. Trouver proprement la dimension du noyau de f, en précisant une de ses bases.

2. Énoncer rigoureusement le théorème du rang. En déduire la dimension de l'image de f.

3. Trouver une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3 : changement de bases (7 points)

Les questions sont indépendantes.

1. On considère l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x-3y, -2x+y) \end{array} \right.$.

   On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On admet que $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1 = (2,1), \varepsilon_2 = (1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

   (a) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée.

   (b) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ au départ et $\mathcal{B}$ à l'arrivée. Faire apparaitre l'essentiel de vos calculs.

   (c) Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ au départ et $\mathcal{B}'$ à l'arrivée. Faire apparaitre l'essentiel de vos calculs.

2. Soient $\mathcal{B} = (u_1 = (1,2), u_2 = (-1,-1))$ une base de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}' = (P_1 = 2, P_2 = X-1, P_3 = (X+1)^2)$ une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

   Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_2[X])$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ au départ et $\mathcal{B}'$ à l'arrivée est

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   Soit $u = (0,1) \in \mathbb{R}^2$. Trouver $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(u) = aX^2 + bX + c$.

Exercice 4 : un exemple (10 points)

On se place dans $E = \mathbb{R}^2$. Soient les sous-espaces vectoriels de E : $F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$ et $G = \mathrm{Vect}(\varepsilon_2)$ avec $\varepsilon_1 = (2,1)$ et $\varepsilon_2 = (-1,2)$.

1. Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$.

2. Soit $u = (x,y) \in E$. Montrer que $v = \left(\dfrac{2y+4x}{5}, \dfrac{y+2x}{5}\right) \in F$ et $w = \left(\dfrac{-2y+x}{5}, \dfrac{4y-2x}{5}\right) \in G$.

3. En déduire que $E = F \oplus G$.

4. Soit p la projection sur F parallèlement à G.

   (a) Dans le quadrillage ci-dessous (1 unité=2 carreaux), dessiner les axes de $\mathbb{R}^2$, F, G et $u = (3,4)$. Graphiquement, trouver les coordonnées de $p(u)$ dans la base canonique d'une part et dans la base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ d'autre part. Vous ferez apparaitre **tous les traits de construction**.

Graphiquement, les coordonnées de $p(u)$ sont :

- dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$: ....

- dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$: ....

(b) Lire graphiquement $p(\varepsilon_1)$ et $p(\varepsilon_2)$ en fonction de ε_1 et ε_2.

$p(\varepsilon_1) =$ .... et $p(\varepsilon_2) =$ ....

(c) Déterminer la matrice A de p dans la base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ **au départ et à l'arrivée**.

....
....
....
....

(d) Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. En vous aidant de la question 2., trouver l'expression de $p(u)$.

....
....
....

Exercice 5 : matrice, image et noyau (5 points)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[X])$ dont la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ au départ et la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ à l'arrivée est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En raisonnant sur les colonnes de A, trouver la rang de A, une base de l'image et du noyau de f. Vous êtes libres de les obtenir dans l'ordre que vous voulez.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....