

S2 B4 Correction examen ALM

Exercice 1 : opérations matricielles

Les questions sont indépendantes.

1. Considérons les deux matrices à coefficients réels : $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Pour chacun des produits suivants, dire (en justifiant) s'il est bien défini ou non. En cas de réponse positive, effectuer le produit.

(a) AB

A a 3 colonnes et B a 2 lignes. Le nombre de colonnes de A n'étant pas égal au nombre de lignes de B , AB n'est pas défini.

(b) BA

B a 2 colonnes et A a 2 lignes. Le nombre de colonnes de B étant égal au nombre de lignes de A , BA est bien défini et aura 2 lignes et 3 colonnes. On a

$$BA = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

2. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer AB .

On a $AB = I_2$.

(b) La matrice A est-elle inversible ? Justifier et, si votre réponse est positive, donner A^{-1} .

La matrice A n'étant pas une matrice carrée, elle n'est pas inversible.

3. (a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ -3 & -7 & -14 \end{pmatrix}$. On admet que A est inversible. Trouver A^{-1} . Vous ferez apparaître tous les détails de vos calculs.

Soient $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On sait que $AU = V \iff U = A^{-1}V$.

$$AU = V \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = X \\ x + 3y + 7z = Y \\ -3x - 7y - 14z = Z \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = X \\ y + 4z = Y - X \\ -y - 5z = Z + 3X \end{cases} \text{ en faisant } L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$$

Puis, en faisant $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, et en remontant le système, on obtient

$$AU = V \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = X \\ y + 4z = Y - X \\ -z = 2X + Y + Z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -7X - 7Y - 5Z \\ y = 7X + 5Y + 4Z \\ z = -2X - Y - Z \end{cases} \iff U = \begin{pmatrix} -7 & -7 & -5 \\ 7 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times V$$

$$\text{Ainsi, } A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -7 & -5 \\ 7 & 5 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Expliquer comment vous pouvez vérifier le résultat obtenu à la question précédente.

On vérifie que $AA^{-1} = I_3$.

Exercice 2 : application linéaire

On considère l'application linéaire $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ (a, b, c) & \longmapsto (a-b)X^2 + (a+b-c)X - 2a + 2b \end{cases}$

1. Trouver proprement la dimension du noyau de f , en précisant une de ses bases.

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, f((a, b, c)) = 0X^2 + 0X + 0\} \\ &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a - b = 0, a + b - c = 0, -2a + 2b = 0\} \\ &= \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a = b \text{ et } c = 2a\} \\ &= \{(a, a, 2a), a \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(1, 1, 2), a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(u = (1, 1, 2)) \end{aligned}$$

Ainsi, (u) est une famille génératrice de $\text{Ker}(f)$. Or $u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, d'où (u) est libre. (u) est donc une base de $\text{Ker}(f)$ qui est de dimension 1.

2. Énoncer rigoureusement le théorème du rang. En déduire la dimension de l'image de f .

• Théorème du rang : soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, F un \mathbb{R} -espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors,

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f))$$

• Cela donne ici, $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2$.

3. Trouver une base de $\text{Im}(f)$.

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{(a-b)X^2 + (a+b-c)X - 2a + 2b, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \} \\ &= \{a(X^2 + X - 2) + b(-X^2 + X + 2) + c(-X), (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \text{Vect}(P_1 = X^2 + X - 2, P_2 = -X^2 + X + 2, P_3 = -X) = \text{Vect}(P_1, P_2) \text{ car } P_1 + P_2 = -2P_3 \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{F} = (P_1, P_2)$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$. Or $\dim(\text{Im}(f)) = \text{Card}(\mathcal{F}) = 2$. (P_1, P_2) est donc une base de $\text{Im}(f)$.

Exercice 3 : changement de bases

Les questions sont indépendantes.

1. On considère l'application linéaire $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (2x - 3y, -2x + y) \end{cases}$.

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 . On admet que $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1 = (2, 1), \varepsilon_2 = (1, 1))$ est une base de \mathbb{R}^2 .

- (a) Écrire la matrice de f dans la base \mathcal{B} au départ et à l'arrivée.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Écrire la matrice de f dans la base \mathcal{B}' au départ et \mathcal{B} à l'arrivée. Faire apparaître l'essentiel de vos calculs essentiels.

$f(\varepsilon_1) = (1, -3)$ et $f(\varepsilon_2) = (-1, -1)$. Ainsi,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Écrire la matrice de f dans la base \mathcal{B} au départ et \mathcal{B}' à l'arrivée. Faire apparaître l'essentiel de vos calculs.

$f(e_1) = (2, -2) = 4\varepsilon_1 - 6\varepsilon_2$ et $f(e_2) = -4\varepsilon_1 + 5\varepsilon_2$ (par résolution de systèmes). Ainsi,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Soient $\mathcal{B} = (u_1 = (1, 2), u_2 = (-1, -1))$ une base de \mathbb{R}^2 , $\mathcal{B}' = (P_1 = 2, P_2 = X - 1, P_3 = (X + 1)^2)$ une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_2[X])$ dont la matrice dans la base \mathcal{B} au départ et \mathcal{B}' à l'arrivée est

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Soit $u = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$. Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(u) = aX^2 + bX + c$.

On a $u = u_1 + u_2$, ainsi $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. D'où, $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(u)) = AU = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On en déduit que $f(u) = 3P_1 - 5P_2 - 2P_3 = 3 \times 2 - 5(X - 1) - 2(X + 1)^2 = -2X^2 - 9X + 9$. Donc, $a = -2, b = -9$ et $c = 9$.

Exercice 4 : un exemple

On se place dans $E = \mathbb{R}^2$. Soient les sous-espaces vectoriels de E : $F = \text{Vect}(\varepsilon_1)$ et $G = \text{Vect}(\varepsilon_2)$ avec $\varepsilon_1 = (2, 1)$ et $\varepsilon_2 = (-1, 2)$.

1. Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$.

Soit $u \in F \cap G$. On a $u \in F$ et $u \in G$. Ainsi, $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = \alpha\varepsilon_1 = (2\alpha, \alpha)$ et $u = \beta\varepsilon_2 = (-\beta, 2\beta)$. On en déduit que $2\alpha = -\beta$ et $\alpha = 2\beta$. Ainsi, $\alpha = \beta = 0$ D'où $u = 0_E$, ce qui montre que $F \cap G \subset \{0_E\}$. Or on sait que $\{0_E\} \subset F \cap G$ car $F \cap G$ est un sev de E .

On a donc $F \cap G = \{0_E\}$.

2. Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $v = \left(\frac{2y+4x}{5}, \frac{y+2x}{5}\right) \in F$ et $w = \left(\frac{-2y+x}{5}, \frac{4y-2x}{5}\right) \in G$.

$$\bullet v = \frac{y+2x}{5}(2, 1) = \frac{y+2x}{5}\varepsilon_1 \implies v \in F.$$

$$\bullet w = \frac{2y-x}{5}(-1, 2) = \frac{2y-x}{5}\varepsilon_2 \implies w \in G.$$

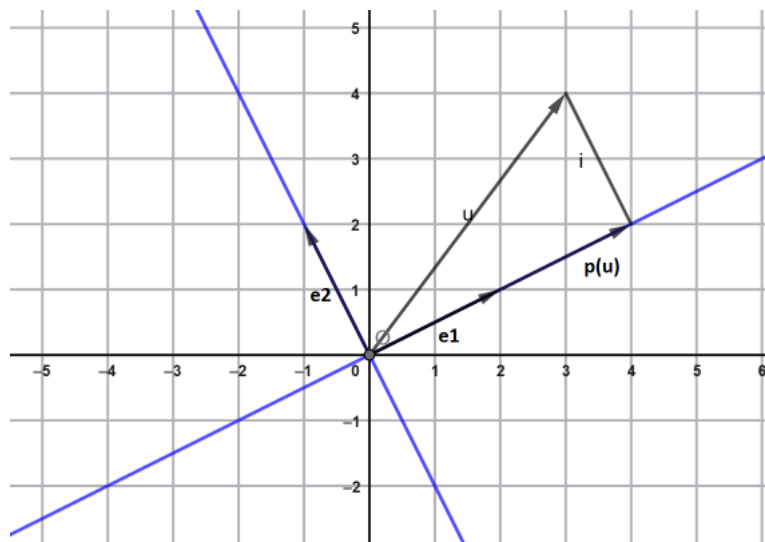
3. En déduire que $E = F \oplus G$.

• Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On remarque que $u = v + w$ avec v et w définis ci-dessus. Donc $u \in F + G$. On a donc $E \subset F + G$. Or $F + G \subset E$ par définition, donc $E = F + G$.

$F \cap G = \{0_E\}$ et $E = F + G$. Donc, $E = F \oplus G$.

4. Soit p la projection sur F parallèlement à G .

(a) Dans le quadrillage ci dessous (1 unité=2 carreaux), dessiner les axes de \mathbb{R}^2 , F , G et $u = (3, 4)$. Graphiquement, trouver les coordonnées de $p(u)$ dans la base canonique d'une part et dans la base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ d'autre part. Vous ferez apparaître **tous les traits de construction**.



Graphiquement, les coordonnées de $p(u)$ sont :

- dans la base canonique de \mathbb{R}^2 : $(4, 2)$

- dans la base \mathcal{B} de \mathbb{R}^2 : $(2, 0)$

(b) Lire graphiquement $p(\varepsilon_1)$ et $p(\varepsilon_2)$ en fonction de ε_1 et ε_2 .

$$p(\varepsilon_1) = \varepsilon_1 = 1\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 \text{ et } p(\varepsilon_2) = 0_E = 0\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2.$$

(c) Déterminer la matrice A de p dans la base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ **au départ et à l'arrivée**.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. En vous aidant de la question 2., trouver l'expression de $p(u)$.

p est la projection sur F parallèlement à G donc, à $u \in E$, elle associe le v dans sa décomposition dans $F + G$. Donc

$$p : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto \left(\frac{2y + 4x}{5}, \frac{y + 2x}{5} \right) \end{cases}$$

Exercice 5 : matrice, image et noyau

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[X])$ dont la matrice, dans la base canonique de \mathbb{R}^3 au départ et la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ à l'arrivée est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En raisonnant sur les colonnes de A , trouver le rang de A , une base de l'image et du noyau de f . Vous êtes libres de les obtenir dans l'ordre que vous voulez.

On note C_1, C_2 et C_3 les 3 colonnes de A .

• $\text{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \text{Vect}(C_1, C_2)$ car $C_3 = -C_1$. Ainsi, $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f((1, 0, 0)), f((0, 1, 0))) = \text{Vect}(1 - 2X + X^2, 2 + X)$. Ainsi, $(P_1 = 1 - 2X + X^2, P_2 = 2 + X)$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$. Comme P_1 et P_2 ne sont pas colinéaires, cette famille est libre. Donc (P_1, P_2) est une base de $\text{Im}(f)$ et $\dim(\text{Im}(f)) = 2$. On a donc que le rang de A est égal à 2.

• Le théorème du rang nous donne alors :

$$\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Im}(f)) = 3 - 2 = 1.$$

• $C_3 = -C_1 \implies C_1 + C_3 = 0_{3,1} \implies e_1 + e_3 \in \text{Ker}(f)$ avec $e_1 = (1, 0, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.

D'où, $u = (1, 0, 1) \in \text{Ker}(f)$. Comme u est non nul, la famille (u) est libre. Or $\text{Card}((u)) = \dim(\text{Ker}(f))$ donc (u) est génératrice de $\text{Ker}(f)$. Cela en est donc une base.