# EPITA

# Mathématiques

## Examen S2-B4-EV

## Espaces vectoriels

## durée : 1 heure

**Mai 2025**

**Nom :**

**Prénom :**

**Classe :**

## NOTE :

**Le barème est sur 20 points.**

---

## Consignes :

— Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 2 exercices.**
— **La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
— Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.
— Documents et calculatrices interdits.
— Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

---

# Exercice 1 : familles de vecteurs (10 points)

**Les questions sont indépendantes.**

1. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère la famille $\mathcal{F} = (P_1 = 1, P_2 = X^2 + X + 1, P_3 = X^2 - X + 1)$.

   (a) Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

   (b) Quelles sont les coordonnées de $Q = 2X^2 + 4X + 4$ dans la base $\mathcal{F}$ ?

2. On se place dans $E = \mathbb{R}^n$. Soient $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$ et $\varepsilon_4$ quatre vecteurs non nuls de $E$. On admet que la famille $\mathcal{F} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ est libre.

   (a) La famille $\mathcal{F}_1 = (\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est-elle libre ? Faire la preuve de ce que vous affirmez.

   (b) Soit $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F}_1)$. Donner une base $\mathcal{B}$ de $F$. Justifier.

   (c) Justifier que $u = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \in F$ et donner ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

3. Dans $E = \mathbb{R}^2$, on considère la base $\mathcal{B} = (u_1 = (2,1), u_2 = (-1,1))$.

   (a) Ci dessous, dessiner les deux repères (avec 2 carreaux = 1 unité) formés d'une part par la base canonique de $\mathbb{R}^2$, d'autre part par $\mathcal{B}$. Soit $u = (5,1)$. Trouver graphiquement les coordonnées de $u$ dans la base $\mathcal{B}$. **Vous ferez apparaitre vos traits de construction.**

   Graphiquement, les coordonnées de $u$ dans $\mathcal{B}$ sont : ........................

   (b) Vérifier par le calcul ce que vous avez trouvé dans la question précédente.

## Exercice 2 : somme de sev (10 points)

On se place dans $E = \mathbb{R}^3$. On considère les deux sous-espaces vectoriels :

$$F = \mathrm{Vect}\left((u = (1, 0, -2), v = (0, 1, 1), w = (1, 1, -1))\right) \qquad \text{et} \qquad G = \left\{(x, y, z) \in E, \left| \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 0 \\ x - 2y + z & = & 0 \end{array} \right.\right\}$$

1. Trouver rigoureusement une base de $F$. En déduire la dimension de $F$.

2. Trouver rigoureusement une base de $G$. En déduire la dimension de $G$.

3. Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$.

**[Suite des pointillés page suivante]**

..................................................................................................................
..................................................................................................................
..................................................................................................................
..................................................................................................................
..................................................................................................................
..................................................................................................................
..................................................................................................................
..................................................................................................................
..................................................................................................................
..................................................................................................................

4. Rappeler la définition de $F \oplus G = E$. Est-ce le cas ici ? Justifier votre réponse.

..................................................................................................................
..................................................................................................................
..................................................................................................................
..................................................................................................................
..................................................................................................................
..................................................................................................................
..................................................................................................................
..................................................................................................................
..................................................................................................................
..................................................................................................................
..................................................................................................................
..................................................................................................................
..................................................................................................................
..................................................................................................................
..................................................................................................................
..................................................................................................................
..................................................................................................................
..................................................................................................................
..................................................................................................................
..................................................................................................................