EPITA

Mathématiques

Examen S2-B4-ALM

Applications linéaires et matrices

durée : 2 heures

Mai 2025

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 40 points. La note sera ramenée à une note sur 20 par division par 2.

Consignes :

- Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 5 exercices.**
- **La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
- Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.
- Documents et calculatrices interdits.
- Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 : opérations matricielles (8 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Considérons les deux matrices à coefficients réels : $A = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} y & 7 \\ -1 & 3y \end{pmatrix}$.

   On pose $2A - 4B = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Trouver les deux réels x et y tels que $c_{1,1} = -6$ et $c_{2,2} = -8$. Calculer alors $2A - 4B$.

2. On se donne $A = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Peut-on faire le produit AB ? BA ? Justifier dans tous les cas. Si oui, effectuer ce produit en détaillant vos calculs intermédiaires.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

   (a) On admet que A est inversible. Trouvez A^{-1}. Vous ferez apparaitre tous les détails de vos calculs.

   (b) Expliquez comment vous pouvez vérifier le résultat obtenu à la question précédente.

Exercice 2 : application linéaire (10 points)

On considère l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ aX^2 + bX + c & \longmapsto & (2a - b + c, a) \end{array} \right.$

1. Trouver proprement la dimension du noyau de f, en précisant une de ses bases.

2. Énoncer rigoureusement le théorème du rang. En déduire la dimension de l'image de f.

3. f est-elle injective ? Justifier.

4. f est-elle surjective ? Justifier.

Exercice 3 : changement de bases (7 points)

On considère l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-2x-y, -2z-y, 0) \end{array} \right.$.

1. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ au départ et à l'arrivée. Inutile de justifier.

....
....
....
....

2. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1 = ((1,0,0),(-1,1,0),(1,-2,1))$ au départ et la base canonique à l'arrivée. Faire apparaitre vos calculs.

....
....
....
....
....
....

3. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1$ au départ et à l'arrivée. On notera A cette matrice. Inutile de justifier.

....
....
....
....

4. Expliquer pourquoi « en regardant » la matrice A, vous pouvez en déduire que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

....
....
....
....
....
....
....
....

5. En déduire $\dim(\mathrm{Ker}(f))$. En déduire aussi une base. Justifier.

....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 4 : projection (10 points)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

On suppose que $F \oplus G = E$. Ainsi, on sait que : $\forall\, u \in E$, $\exists\,!(v, w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$.

Considérons l'application linéaire $p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & v \end{array} \right.$.

La question 4 peut être traitée en admettant les questions précédentes !

1. Supposons $u \in F$. Expliquer pourquoi $p(u) = u$.

   ....

   ....

2. Supposons $u \in G$. Expliquer pourquoi $p(u) = 0_E$

   ....

   ....

3. Soit $u \in E$ **quelconque**. Montrer que $p \circ p(u) = p(u)$.

   ....

   ....

4. On suppose ici que $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathrm{Vect}((\varepsilon_1))$ et $G = \mathrm{Vect}((\varepsilon_2))$ où $\varepsilon_1 = (2, 1)$ et $\varepsilon_2 = (-2, 4)$.

   (a) Dans le quadrillage ci dessous (1 unité=2 carreaux), dessiner les axes de $\mathbb{R}^2$, F, G et $u = (3, 4)$. Graphiquement, trouver $v \in F$ et $w \in G$ tel que $u = v + w$. Lire graphiquement les coordonnées de $p(u)$. Vous ferez apparaitre **tous les traits de construction**.

   Graphiquement, les coordonnées de $p(u)$ sont : ....

   (b) Justifier que $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

   ....

   ....

(c) Déterminer la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ **au départ et à l'arrivée**.

....
....
....
....

Exercice 5 : une démonstration guidée (5 points)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $u \in E$. On note

- $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E (pas forcément la base canonique) et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base de F (pas forcément la base canonique)
- $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \\ a_5 & a_6 \end{pmatrix}$ la matrice à coefficients réels de f dans la base $\mathcal{B}$ au départ et la base $\mathcal{B}'$ à l'arrivée.
- $U = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ la matrice colonne formée des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ c'est-à-dire $u = \alpha e_1 + \beta e_2$.
- V la matrice colonne formée des coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

1. Écrire $f(e_1)$ et $f(e_2)$ en fonction de ε_1, ε_2 et ε_3 et des coefficients de la matrice A.

....
....
....

2. En déduire $f(u)$ comme combinaison linéaire de ε_1, ε_2 et ε_3.

....
....
....

3. En déduire une formule matricielle qui donne V en fonction de A et U.

....
....
....
....

4. Application. Prenons $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}_2[X]$, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B} = ((1,2),(3,4))$, $\mathcal{B}' = \big(1, X+1, (X-1)^2\big)$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ (même contexte que dans la question précédente !).

   Soit $u = (4,6) \in \mathbb{R}^2$. Trouver $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(u) = aX^2 + bX + c$.

....
....
....
....
....
....
....
....