EPITA

Mathématiques

Examen S2-B4-ALM

Applications linéaires et matrices

durée : 2 heures

Juin 2024

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 30 points. La note sera ramenée à une note sur 20 par une règle de trois.

Consignes :

— Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 5 exercices.**
— **La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
— Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.
— Documents et calculatrices interdits.
— Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 : inversion de matrice (4 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On admet que A est inversible. Trouvez A^{-1}. Vous ferez apparaitre tous les détails de vos calculs.

Exercice 2 : application linéaire (9 points)

On considère l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(0), P'(-1)) \end{array} \right.$

1. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ au départ et la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à l'arrivée.

....
....
....
....

2. Montrer proprement que la dimension du noyau de f est égale à 1, en précisant une de ses bases.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. Énoncer rigoureusement le théorème du rang et en déduire la dimension de l'image de f.

....
....
....
....

4. f est-elle injective ? Justifier.

....
....
....
....

5. f est-elle surjective ? Justifier.

....
....
....
....

Exercice 3 : changement de bases (3 points)

On considère l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ (a,b) & \longmapsto & (-3a+5b)X-4a+6b \end{array} \right.$.

1. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ au départ et la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$ à l'arrivée.

2. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1 = ((1,1),(2,1))$ au départ et la base $\mathcal{B}_2 = (X+1, X+2)$ à l'arrivée.

3. Sachant que la base d'arrivée est la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$, qu'a-t-on pris comme base de départ pour obtenir $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ comme matrice de f dans ces bases ?

Exercice 4 : projection (8 points)

On considère l'application linéaire $p : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (0, x+y) \end{array} \right.$.

On admet que : $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}((1,-1))$ et $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}((0,1))$.

1. Dans le quadrillage situé page suivante, dessiner $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$.
2. En quoi votre dessin montre-t-il que $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = \mathbb{R}^2$?

3. Soit $u \in \mathbb{R}^2$. On sait alors que : $\exists!\,(u_1, u_2) \in \mathrm{Ker}(p) \times \mathrm{Im}(p)$ tel que $u = u_1 + u_2$.
   Que vaut $p(u_1)$? Que vaut $p(u_2)$? En déduire $p(u)$ en fonction de u_1 et/ou u_2.

   ....
   ....
   ....
   ....

4. Dessiner dans le quadrillage, $u = (-1, -2)$. Graphiquement, pour ce vecteur, trouver u_1, u_2. Lire graphiquement les coordonnées de $p(u)$. Vous ferez apparaitre **tous les traits de construction**.
5. Vérifier que $p \circ p = p$.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

6. On admet que $\mathcal{B} = ((1, -1), (0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice de p dans cette base **au départ et à l'arrivée**.

   ....
   ....
   ....
   ....

Quadrillage : graphiquement, j'ai trouvé que $p(u) = \ldots\ldots\ldots$

[N'oubliez pas de tourner la page. Dernier exercice page suivante.]

Exercice 5 : matrices (6 points)

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ dont la matrice dans la base canonique au départ et à l'arrivée est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Soit $P = -3 + 2X - 4X^2$. Trouver U la matrice colonne formée des coordonnées de P dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

   ....
   ....
   ....
   ....

   (b) En vous aidant d'un produit matriciel, calculer $f(P)$.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et la base $\mathcal{B}' = (u_1 = (2, 0, 0), u_2 = (-3, 1, 0), u_3 = (16, 8, 1))$.

   Pour $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on note X la matrice colonne formée des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ et X' la matrice colonne formée des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}'$

   (a) Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

   ....
   ....
   ....
   ....

   (b) Soit $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = 2u_1 + 3u_2 - 4u_3$. Entre X et X', laquelle est-elle immédiate à donner ? Donner la et trouver l'autre **via un calcul matriciel**. Vérifier ensuite votre calcul « à la main ».

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....