Correction S2 B4 ALM

Exercice 1 : inversion de matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On admet que A est inversible. Trouvez A^{-1}. Vous ferez apparaitre tous les détails de vos calculs.

Soient $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$. On sait que $AU = V \iff U = A^{-1}V$.

$$AU = V \iff \left\{ \begin{array}{lcl} 2x+y+z & = & X \\ 2x-y+2z & = & Y \\ -x+y-z & = & Z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcll} 2x+y+z & = & X & \\ 4x+3z & = & X+Y & (L_2 \longleftarrow L_2+L_1) \\ -3x-2z & = & Z-X & (L_3 \longleftarrow L_3-L_1) \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcll} 2x+y+z & = & X & \\ 4x+3z & = & X+Y & \\ z & = & 4(Z-X)+3(X+Y) = -X+3Y+4Z & (L_3 \longleftarrow 4L_3+3L_2) \end{array} \right.$$

Il suffit à présent de remonter le système :

$$AU = V \iff \left\{ \begin{array}{lcl} y & = & X-2x-z \\ 4x & = & 4X-8Y-12Z \\ z & = & -X+3Y+4Z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} y & = & Y+2Z \\ x & = & X-2Y-3Z \\ z & = & -X+3Y+4Z \end{array} \right. \iff U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} V$$

On en déduit que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 2 : application linéaire

On considère l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(0), P'(-1)) \end{array} \right.$

1. *Donner la matrice de f dans la base canonique $(1, X, X^2)$ au départ et la base canonique $((1,0),(0,1))$ à l'arrivée.*

   Notons $\mathcal{B}$ la base canonique du départ et $\mathcal{B}'$ celle de l'arrivée. On a $f(1) = (1,0)$, $f(X) = (0,1)$ et $f(X^2) = (0,-2)$. Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. *Montrer proprement que la dimension du noyau de f est égale à 1.*

   $$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}(f) & = & \left\{a+bX+cX^2 \in \mathbb{R}_2[X],\ a+b\times 0+c\times 0^2 = 0 \text{ et } \ 2c(-1)+b = 0\right\} \\ & = & \left\{a+bX+cX^2 \in \mathbb{R}_2[X],\ a = 0 \text{ et } \ b = 2c\right\} \\ & = & \left\{0+2cX+cX^2,\ c \in \mathbb{R}\right\} = \left\{c(2X+X^2), c \in \mathbb{R}\right\} \end{array}$$

   On en déduit que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((2X+X^2))$. Ainsi, $(2X+X^2)$ engendre $\mathrm{Ker}(f)$. Or $2X+X^2$ étant non nul, la famille $(2X+X^2)$ est libre. C'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

3. *Énoncer rigoureusement le théorème du rang et en déduire la dimension du noyau de f.*

   $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^2)$ et $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension finie, d'où $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$.
   Ainsi, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2$.

4. *f est-elle injective ? Justifier.*

   f n'est pas injective car $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1 \neq 0$ et donc $\mathrm{Ker}(f) \neq \left\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\right\}$.

5. *f est-elle surjective ? Justifier.*

   On sait que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$. Or $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, d'où $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. Ainsi, f est surjective.

Exercice 3 : changement de bases

On considère l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ (a,b) & \longmapsto & (-3a+5b)X-4a+6b \end{array} \right.$.

1. *Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ au départ et la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$ à l'arrivée.*

   $f((1,0)) = -3X-4$ et $f((0,1)) = 5X+6$. Ainsi, la matrice cherchée est $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

2. *Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1 = ((1,1),(2,1))$ au départ et la base $\mathcal{B}_2 = (X+1, X+2)$ à l'arrivée.*

   $f((1,1)) = 2X+2 = 2(X+1)$ et $f((2,1)) = -X-2 = -(X+2)$. Ainsi, la matrice cherchée est $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. *Sachant que la base d'arrivée est la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$, qu'a-t-on pris comme base de départ pour obtenir $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ comme matrice de f dans ces bases ?*

   La deuxième colonne de la matrice correspond à la première colonne de A, ainsi le deuxième vecteur de la base cherchée est $(1,0)$. De plus, on a vu dans la question précédente que $f((1,1)) = 2+2X$. Donc la base cherchée est $((1,1),(1,0))$.

Exercice 4 : projection

On considère l'application linéaire $p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (0, x+y) \end{array} \right.$.

On admet que : $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}((1,-1))$ et $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}((0,1))$.

1. *Dans le quadrillage situé page suivante, dessiner* $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$.

   Cela revient à tracer les droites d'équations $y = -x$ et $x = 0$.

2. *En quoi votre dessin montre-t-il que* $\mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = \mathbb{R}^2$?

   Le dessin indique de $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.
   Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(p)) + \dim(\mathrm{Im}(p)) = \dim(\mathrm{Ker(p)}+\mathrm{Im(p)}) = 2$. Donc $\mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p) = \mathbb{R}^2$.

3. *Soit $u \in \mathbb{R}^2$. On sait alors que : $\exists!\,(u_1,u_2) \in Ker(p) \times Im(p)$ tel que $u = u_1 + u_2$.*
   Que vaut $p(u_1)$? Que vaut $p(u_2)$? En déduire $p(u)$ en fonction de u_1 et/ou u_2.

   Comme u_1 est dans le noyau de p, $p(u_1) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

   $u_2 \in \mathrm{Im}(f)$ d'où $u_2 = \alpha(0,1) = (0,\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Ainsi, $p(u_2) = (0, 0+\alpha) = (0,\alpha) = u_2$.

   Par conséquent, $p(u) = p(u_1) + p(u_2) = 0_{\mathbb{R}^2} + u_2 = u_2$.

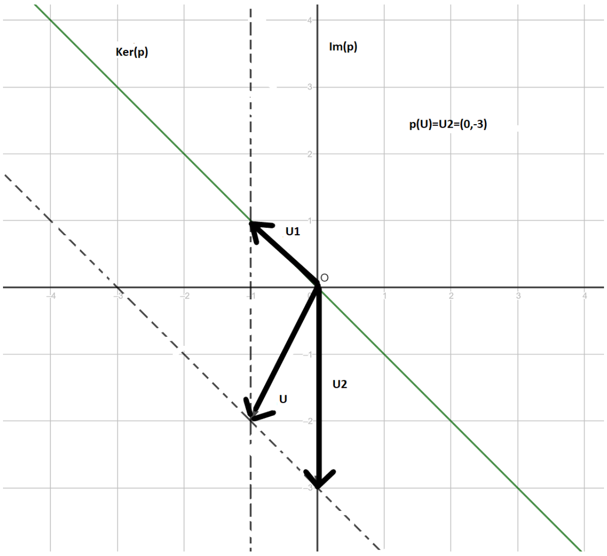
4. *Dessiner dans le quadrillage, $u = (-1,-2)$. Graphiquement trouver $p(u)$ en faisant apparaitre tous les traits de construction.*

5. *Vérifier que $p \circ p = p$.*

   Soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a $p \circ p(u) = p(p(u)) = p((0, x+y)) = (0, 0+x+y) = (0, x+y) = p(u)$.
   Donc, $\forall\, u \in \mathbb{R}^2$, $p \circ p(u) = p(u)$, c'est-à-dire $p \circ p = p$.

6. *On admet que $\mathcal{B} = ((1,-1),(0,1))$ est une base base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice de p dans cette base* ***au départ et à l'arrivée****.*

   $p((1,-1)) = (0,0)$ et $p((0,1)) = (0,1)$. Donc, la matrice cherchée est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.



Exercice 5 : matrices

les deux questions sont indépendantes.

1. *Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ au départ et à l'arrivée est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) *Soit $P = -3 + 2X - 4X^2$. Trouver U la matrice colonne formée des coordonnées de P dans la base canonique $\mathcal{B}$.*

   $$U = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

   (b) *En vous aidant d'un produit matriciel, calculer $f(P)$.*

   $AU = \begin{pmatrix} -13 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix}$. Ainsi, $f(P) = -13 - 12X - 3X^2$.

2. *Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et la base $\mathcal{B}' = (u_1 = (2, 0, 0), u_2 = (-3, 1, 0), u_3 = (16, 8, 1))$.*

   Pour $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on note X la matrice colonne formée des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ et X' la matrice colonne formée des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}'$

   (a) *Écrire la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.*

   $$P = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 16 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) *Soit $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = 2u_1 + 3u_2 - 4u_3$. Entre X et X', laquelle est-elle immédiate à donner ? Donner la et trouver l'autre **via un calcul matriciel**. Vérifier ensuite votre calcul « à la main ».*

   L'énoncé donne $X' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. On sait alors que $X = PX'$.

   D'où $X = \begin{pmatrix} 2 \times 2 - 3 \times 3 + 16 \times (-4) \\ 1 \times 3 + 8 \times (-4) \\ 1 \times (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -69 \\ -29 \\ -4 \end{pmatrix}$

   Vérification : $u = 2u_1 + 3u_2 - 4u_3 = 2(2, 0, 0) + 3(-3, 1, 0) - 4(16, 8, 1) = (4 - 9 - 64, 3 - 32, -4) = (-69, -29, -4)$.