Correction S2-B4-EV

Exercice 1 : familles de vecteurs

Les questions sont indépendantes.

1. *Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la famille $\mathcal{F} = (u_1 = (1,1,1), u_2 = (2,1,1), u_3 = (1,-1,1))$.*

   (a) *Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*

   Montrons que $\mathcal{F}$ est libre : soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. On est ramené au système
$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta - \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 0 \end{cases}$$

   En faisant $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, cela revient à $\begin{cases} \beta &= 0 \\ -2\gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0.$

   Ainsi, $\mathcal{F}$ est une famille libre.

   Or $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ et $\mathcal{F}$ est libre donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) *Quelles sont les coordonnées de $v = (3,2,0)$ dans la base $\mathcal{F}$?*

   Cherchons $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = v$. On a :
$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma &= 3 \\ \alpha + \beta - \gamma &= 2 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta &= 3 \quad (L_1 \leftarrow L_1 - L_3) \\ -2\gamma &= 2 \quad (L_2 \longleftarrow L_2 - L_3) \\ \alpha + \beta + \gamma &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha &= -2 \\ \gamma &= -1 \\ \beta &= 3 \end{cases}$$

   Ainsi, $v = -2u_1 + 3u_2 - u_3$. Les coordonnées de v dans la base $\mathcal{F}$ sont $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. *On se place dans $E = \mathbb{R}_2[X]$.*

   (a) *La famille $\mathcal{F}_1 = (1, X, X^2 + X, X^2)$ est-elle génératrice de E ? Justifiez votre réponse.*

   Oui, la famille $\mathcal{F}_1$ est génératrice de E car, pour tout $P \in E$, $\exists\,(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = a + bX + cX^2$. Ainsi, $P = a + bX + 0(X^2 + X) + cX^2$.

   (b) *La famille $\mathcal{F}_2 = (1, X, X - 2, X^2)$ est-elle une famille libre de E ? Justifiez votre réponse.*

   Non la famille $\mathcal{F}_2$ est liée car $2 - X + (X - 2) + 0 \times X^2 = 0_E$.

   (c) *On admet que la famille $\mathcal{F}_3 = (1, X - 1, (X+1)^2)$ est une base de E. Soit $Q \in E$ le polynôme de coordonnées 1, 2 et -1 dans la base $\mathcal{F}_3$. Quelles sont les coordonnées de Q dans la base canonique de E ?*

   On a $Q = 1 \times 1 + 2 \times (X - 1) - 1 \times (X+1)^2 = 1 + 2X - 2 - X^2 - 2X - 1 = -2 + 0X - X^2$. Dans la base canonique de E, Q a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. *Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X - 1$ et $P_3 = X + 1$. Soit le sous-espace vectoriel $F = Vect((P_0, P_1, P_2, P_3))$. Trouver la dimension de F, en justifiant soigneusement votre raisonnement.*

   La famille (P_0, P_1, P_2, P_3) est liée car $P_2 = P_1 - P_0$ et $P_3 = P_0 + P_1$. Ainsi, $F = \text{Vect}((P_0, P_1, P_2, P_3)) = \text{Vect}((P_0, P_1, P_3)) = \text{Vect}((P_0, P_1))$. On en déduit que la famille (P_0, P_1) est génératrice de F. Or cette famille est libre (non colinéaires), c'est donc une base de F. Par conséquent, $\dim(F) = 2$.

Exercice 2 : somme de sev

On se place dans $E = \mathbb{R}^3$. On considère les trois sous-espaces vectoriels :

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x+y=0\right\},\ G = \text{Vect}((1,1,0)) \text{ et } H = \text{Vect}((-1,2,3))$$

1. *Que représentent géométriquement F, G et H ?*

   F est un plan vectoriel, G et H sont deux droites vectorielles.

2. *Trouver rigoureusement une base de F, de G et de H :*

   Base de F :
   On a $F = \left\{(x,-2x,z),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{x(1,-2,0) + z(0,0,1),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\right\} = \text{Vect}((e_1,e_2))$ avec $e_1 = (1,-2,0)$ et $e_2 = (0,0,1)$. On en déduit que (e_1,e_2) engendre F. Ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires, ils forment une famille libre. Ainsi, (e_1,e_2) est une base de F, et au passage $\dim(F) = 2$.

   Base de G :
   $((1,1,0))$ engendre G. Or $((1,1,0))$ est libre car $(1,1,0) \neq 0_E$. Donc, $((1,1,0))$ est une base de G et $\dim(G) = 1$.

   Base de H : De même que G, $((-1,2,3))$ est une base de H et $\dim(H) = 1$.

3. *Montrer que $H \subset F$. En déduire que $F \cap H \neq \{0_E\}$.*

   Soit $u \in H$. Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u = \alpha(-1,2,3) = (-\alpha, 2\alpha, 3\alpha)$. Or, $2 \times (-\alpha) + (2\alpha) = 0$. Donc, $u \in F$. On a montré que $H \subset F$. Ainsi, $F \cap H = H \neq \{0_E\}$.

4. Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$.

   Soit $u \in F \cap G$. On a $u \in F$ et $u \in G$. Or $u \in G$, d'où, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u = \alpha(1,1,0) = (\alpha,\alpha,0)$. Mais, on a aussi $u \in F$ d'où, $2\alpha + \alpha = 0$. Ainsi, $\alpha = 0$. Donc $u = (0,0,0) = 0_E$. On a montré que $F \cap G \subset \{0_E\}$. Comme $\{0_E\} \subset F \cap G$, on a bien $F \cap G = \{0_E\}$.

5. Rappeler la définition de $F \oplus G = E$. Est-ce le cas ici ? Démontrer votre réponse.

   $F \oplus G = E$ signifie que $F + G = E$ et $F \cap G = \{0_E\}$. On sait déjà que $F \cap G = \{0_E\}$.

   De plus, $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 1 - 0 = 3 = \dim(E)$. Comme $F + G \subset E$, on en déduit que $F + G = E$.

   On peut donc conclure que $F \oplus G = E$.

6. *Proposer un supplémentaire de H dans E. Justification non demandée.*

   Par exemple $F' = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=0\right\}$ qui est un plan vectoriel tel que $F' \cap H = \{0_E\}$.