EPITA

Mathématiques

Partiel S2

durée : 3 heures

Mai 2023

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 40 points. La note sera ramenée à une note sur 20 en divisant par 2.

Consignes :

— Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 6 exercices.**
— La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.
— Vous devez répondre directement sur les feuilles.
— Documents et calculatrices interdits.
— Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.
— **Notation utilisée** : pour une famille $\mathscr{F}$ de vecteurs d'un $\mathbb{R}$-ev E, le sev engendré par $\mathscr{F}$ sera noté $\mathrm{Vect}\mathscr{F}$ dans tout le partiel. Exemple : si $\mathscr{F} = (u, v)$, on notera le sev engendré par cette famille : $\mathrm{Vect}(u, v)$.

Exercice 1 : familles de vecteurs (6,5 points)

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère la famille $\mathscr{B} = \big(2, X-3, (X+4)^2\big)$.

   (a) Montrer proprement que $\mathscr{B}$ est une base de E.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (b) Soit $A = -3X^2 - 25X - 39 \in E$. Trouver les coordonnées de A dans $\mathscr{B}$.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère la famille $\mathscr{F}_1 = (u_1,\, u_2, u_3,\, u_4)$ formée par 4 vecteurs de E. On suppose de plus que $\mathscr{F}_1$ est une famille libre de E.

   (a) La famille $\mathscr{F}_2 = (u_1, 2u_2, u_3)$ est-elle une famille libre de E ? Justifier.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

(b) La famille $\mathscr{F}_3 = (u_1 + 2u_2,\, 2u_1 - u_2,\, 3u_1 + u_2,\, u_4)$ est-elle une famille libre de E ? Justifier.

....
....
....
....
....

(c) Parmi les familles $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ et $\mathscr{F}_3$, la(les)quelle(s) forme(nt) une base de $\mathbb{R}^4$? Justifier pour chaque famille.

....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 2 : sev de dimension finie (7 points)

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les deux sous-espaces vectoriels suivants :

$$F = \mathrm{Vect}\left((1,1,-1)\right) \ \text{ et } \ G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\, 2x + y - z = 0\right\}$$

1. Trouver une base de F ainsi que sa dimension. Vous justifierez soigneusement votre réponse.

....
....
....
....
....
....

2. Trouver une base de G ainsi que sa dimension. Vous justifierez soigneusement votre réponse.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. Que représentent géométriquement F et G ?

....
....

4. Trouver $F \cap G$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

5. Démontrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 3 : application linéaire 1 (9,5 points)

Dans cet exercice, la question 1. est indépendante des autres questions.

Soit l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P = aX^2 + bX + c & \longmapsto & (a+c, a+2b+3c) \end{array} \right.$

1. (a) Donner la définition de $\mathrm{Ker}(f)$ adaptée à ce contexte. Écrire $\mathrm{Ker}(f)$ sous forme de Vect et justifier soigneusement que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

(b) Quelle est la dimension de l'image de f ? Justifier.

(c) Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

(d) f est-elle injective ? surjective ? Justifier.

2. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ au départ et la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à l'arrivée. (Attention à l'ordre des vecteurs dans les bases...)

3. Donner la matrice de f dans la base $\mathscr{B} = (1, X+1, (2X-3)^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ au départ et la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à l'arrivée.

4. Proposer une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ au départ et la base $\mathscr{B}'$ à l'arrivée soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Il n'est pas la peine de justifier que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 : Inversion de matrice (5 points)

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que la matrice de f dans la base canonique au départ et à l'arrivée est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Inverser la matrice A. Vous ferez apparaitre clairement les opérations sur les lignes que vous effectuerez.

2. Donner l'expression de f^{-1}.

Exercice 5 : changements de bases (8 points)

Dans cet exercice, les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, on note $\mathscr{B}_1 = ((1,0),(0,1))$ la base canonique et $\mathscr{B}_2 = ((1,1),(1,2))$ une autre base.
   Soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ la matrice colonne formée des coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}_1$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ celle formée des coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}_2$.

   (a) On suppose X' connu. En écrivant u comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{B}_2$, trouver une relation matricielle qui donne X en fonction de X'. En déduire aussi la relation matricielle qui donne X' en fonction de X.

   (b) Application : prenons $u = (4,-5) \in \mathbb{R}^2$. Trouver X et trouver X'.

2. Cette question est une adaptation de la démonstration de cours que vous deviez connaitre.

Considérons

— $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
— $F = \mathbb{R}^2$ et $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ une base de F.
— $f \in \mathscr{L}(E, F)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ au départ et $\mathscr{B}'$ à l'arrivée est $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
— Soit $Q \in E$. On note $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ la matrice colonne formée des coordonnées de Q dans la base $\mathscr{B}$ et Y la matrice colonne formée des coordonnées de $f(Q)$ dans la base $\mathscr{B}'$

(a) Écrire $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$ en fonction de ε_1, ε_2 et des coefficients de la matrice A.

....
....
....
....
....

(b) En déduire $f(Q)$ comme combinaison linéaire de ε_1 et ε_2.

....
....
....
....
....
....
....
....

(c) En déduire alors la formule matricielle qui donne Y en fonction de A et de X.

....
....
....
....
....
....

(d) Application : Prenons $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathscr{B}' = ((1,1), (2,1))$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ (même contexte que précédemment).
Trouver les réels x et y tels que $f(1 + 4X - 4X^2) = (x, y)$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 6 : exemple d'application linéaire (4 points)

Dans $\mathbb{R}^2$, soient $F = \text{Vect}((1,1))$ et $G = \text{Vect}((1,-1))$. On admet que $F \oplus G = \mathbb{R}^2$ et que $\mathscr{B} = (v = (1,1), w = (1,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ au départ et à l'arrivée est $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Soit $u \in \mathbb{R}^2$. On sait alors qu'il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = \alpha v + \beta w$. Donner $f(u)$ en fonction de v, w, α et β.

2. Dessiner ci-dessous, F, G, v, w et $u = (2,4)$. Graphiquement trouver α, β et $f(u)$ en faisant apparaitre tous les traits de construction.