Correction Partiel S2

Exercice 1 : familles de vecteurs

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. *Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère la famille $\mathscr{B} = \big(2, X-3, (X+4)^2\big)$.*

   (a) *Montrer proprement que $\mathscr{B}$ est une base de E.*

   Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha.2 + \beta(X-3) + \gamma(X+4)^2 = 0_E$.

   En développant, on obtient : $2\alpha - 3\beta + 16\gamma + (\beta + 8\gamma)X + \gamma X^2 = 0_E$. On en déduit le système : $\begin{cases} 2\alpha - 3\beta + 16\gamma &= 0 \\ \beta + 8\gamma &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{cases}$

   Ainsi, $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et on en déduit que $\mathscr{B}$ est une famille libre.
   Comme $\text{Card}(\mathscr{B}) = 3 = \dim(E)$, on conclut que $\mathscr{B}$ est une base de E.

   (b) *Soit $A = -3X^2 - 25X - 39 \in E$. Trouver les coordonnées de A dans $\mathscr{B}$.*

   On cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha.2 + \beta(X-3) + \gamma(X+4)^2 = A$.

   Par identification, on doit résoudre : $\begin{cases} 2\alpha - 3\beta + 16\gamma &= -39 \\ \beta + 8\gamma &= -25 \\ \gamma &= -3 \end{cases}$

   On trouve $\gamma = -3$, $\beta = -1$ et $\alpha = 3$. Ainsi, les coordonnées de A dans la base $\mathscr{B}$ sont 3, -1 et -3.

2. Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère la famille $\mathscr{F}_1 = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ formée par 4 vecteurs de E. On suppose de plus que $\mathscr{F}_1$ est une famille libre de E.

   (a) *La famille $\mathscr{F}_2 = (u_1, 2u_2, u_3)$ est-elle une famille libre de E ? Justifier.*

   Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\alpha u_1 + \beta.2u_2 + \gamma u_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$.
   Cela revient à $\alpha u_1 + 2\beta u_2 + \gamma u_3 + 0u_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$. Comme la famille $\mathscr{F}_1$ est libre, on en déduit que $\alpha = 2\beta = \gamma = 0$ ce qui donne $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Donc la famille $\mathscr{F}_2$ est libre.

   (b) *La famille $\mathscr{F}_3 = (u_1 + 2u_2,\ 2u_1 - u_2,\ 3u_1 + u_2,\ u_4)$ est-elle une famille libre de E ? Justifier.*

   On a $(u_1 + 2u_2) + (2u_1 - u_2) - (3u_1 + u_2) + 0u_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$. Donc, la famille $\mathscr{F}_3$ est liée.

   (c) *Parmi les familles $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ et $\mathscr{F}_3$, la(les)quelle(s) forme(nt) une base de $\mathbb{R}^4$? Justifier pour chaque famille.*

   - On a $\mathscr{F}_1$ libre et $\text{Card}(\mathscr{F}_1) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$. Donc $\mathscr{F}_1$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
   - $\text{Card}(\mathscr{F}_2) = 3 < \dim(\mathbb{R}^4)$. Donc $\mathscr{F}_2$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^4$.
   - La famille $\mathscr{F}_3$ n'est pas libre. Elle ne peut pas être une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2 : sev de dimension finie

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les deux sous-espaces vectoriels suivants :

$$F = \mathit{Vect}((1,1,-1)) \ \text{ et } \ G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + y - z = 0\right\}$$

1. *Trouver une base de F ainsi que sa dimension. Vous justifierez soigneusement votre réponse.*

   Le vecteur $(1,1,-1)$ forme une famille génératrice de F. Comme ce vecteur n'est pas nul, il forme une famille libre. C'est donc une base de F et $\dim(F) = 1$.

2. *Trouver une base de G ainsi que sa dimension. Vous justifierez soigneusement votre réponse.*

   $G = \{(x, y, 2x+y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x(1,0,2) + y(0,1,1), (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(u,v)$ en posant $u = (1,0,2)$ et $v = (0,1,1)$.
   On en déduit que (u,v) est une famille génératrice de G. Comme u et v ne sont pas colinéaires, cette famille est aussi libre. C'est donc une base de G et $\dim(G) = 2$

3. *Que représentent géométriquement F et G ?*

   F est une droite vectorielle et G est un plan vectoriel.

4. *Trouver $F \cap G$.*

   Soit $u \in F \cap G$. On a $u \in F$ et $u \in G$. Comme $u \in F$, on a $u = (\alpha, \alpha, -\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Or $u \in G$, d'où $2\alpha + \alpha - (-\alpha) = 0$ ce qui donne $\alpha = 0$. Ainsi, $u = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a montré que $F \cap G \subset \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Comme l'inclusion inverse est vraie (car $F \cap G$ est un sev de $\mathbb{R}^3$), on a donc $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

5. *Démontrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.*

   - On sait que $F + G \subset \mathbb{R}^3$. De plus

   $$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 1 + 2 - 0 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

   On en déduit que $F + G = \mathbb{R}^3$

   - $F + G = \mathbb{R}^3$ et $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Donc, $F \oplus G = \mathbb{R}^3$

Exercice 3 : application linéaire 1

Dans cet exercice, la question 1. est indépendante des autres questions.

Soit l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P = aX^2 + bX + c & \longmapsto & (a+c, a+2b+3c) \end{array} \right.$

1. (a) *Donner la définition de $Ker(f)$ adaptée à ce contexte. Écrire $Ker(f)$ sous forme de Vect et justifier soigneusement que $dim(Ker(f)) = 1$.*

   $\mathrm{Ker}(f) = \left\{aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X],\ a + c = 0 \text{ et } a + 2b + 3c = 0\right\} = \left\{aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X],\ c = -a \text{ et } a = b\right\}$
   D'où $\mathrm{Ker}(f) = \left\{aX^2 + aX - a,\ a \in \mathbb{R}\right\} = \left\{a(X^2 + X - 1),\ a \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}(X^2 + X - 1)$.
   La famille $(X^2 + X - 1)$ engendre le noyau de f. Comme elle est composée d'un vecteur non nul, c'est aussi une famille libre. Donc, $(X^2 + X - 1)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

   (b) *Quelle est la dimension de l'image de f ? Justifier.*

   Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2$.

   (c) Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

   On sait que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$. Or par la question précédente, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$. On en déduit que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

   (d) *f est-elle injective ? surjective ? Justifier.*

   - f n'est pas injective car $\mathrm{Ker}(f) \neq \left\{0_{\mathbb{R}_2[X]}\right\}$.
   - f est surjective car $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

2. *Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ au départ et la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à l'arrivée. (Attention à l'ordre des vecteurs dans les bases...)*

   Pour $a = b = 0$ et $c = 1$, on a $f(1) = (1, 3)$.
   Pour $a = c = 0$ et $b = 1$, on a $f(X) = (0, 2)$.
   Pour $c = b = 0$ et $a = 1$, on a $f(X^2) = (1, 1)$.
   La matrice cherchée est donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. *Donner la matrice de f dans la base $\mathscr{B} = (1, X+1, (2X-3)^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ au départ et la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à l'arrivée.* $f(X+1) = (1, 5)$ et $f((2X-3)^2) = f(4X^2 - 12X + 9) = (13, 7)$. La matrice cherchée est donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 13 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

4. *Proposer une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ telle que la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ au départ et la base $\mathscr{B}'$ à l'arrivée soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Il n'est pas la peine de justifier que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.*

   Prenons $\mathscr{B}' = ((1, 3), (0, 2))$. On a $f(X^2) = (1, 1) = 1(1, 3) - 1(0, 2)$. Cela donne la matrice désirée.

Exercice 4 : Inversion de matrice

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que la matrice de f dans la base canonique au départ et à l'arrivée est $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. *Inverser la matrice A. Vous ferez apparaitre clairement les opérations sur les lignes que vous effectuerez.*

   Soient $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$. On sait que $AU = V \iff U = A^{-1}V$.

   Or $AU = V \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x-y+z & = & X \\ x+y-2z & = & Y \\ -2x+y-z & = & Z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x-y+z & = & X \\ 2x-z & = & X+Y \\ -x & = & Z+X \end{array} \right.$ en remplaçant L_2 par $L_2 + L_1$ et L_3 par $L_3 + L_1$. Il suffit alors de remonter ce système. On obtient

   $$AU = V \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -5X-Y-3Z \\ z & = & -3X-Y-2Z \\ x & = & -X-Z \end{array} \right. \iff U = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} V$$

   On en déduit que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

2. *Donner l'expression de f^{-1}.*

   $f^{-1} : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-x-z, -5x-y-3z, -3x-y-2z) \end{array} \right.$

Exercice 5 : changements de bases

Dans cet exercice, les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. *Dans $\mathbb{R}^2$, on note $\mathscr{B}_1 = ((1,0),(0,1))$ la base canonique et $\mathscr{B}_2 = ((1,1),(1,2))$ une autre base.*
   Soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ la matrice colonne formée des coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}_1$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ celle formée des coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}_2$.

   (a) *On suppose X' connu. En écrivant u comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{B}_2$, trouver une relation matricielle qui donne X en fonction de X'. En déduire aussi la relation matricielle qui donne X' en fonction de X.*

   On a $u = x'(1,1) + y'(1,2) = (x'+y', x'+2y') = (x'+y')(1,0) + (x'+2y')(0,1)$. Or $u = x(1,0) + y(0,1)$. Ainsi, par unicité des coordonnées dans une base, $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x'+y' \\ y & = & x'+2y' \end{array} \right.$, ce qui revient à

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

   Ainsi, $X = PX'$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. De là, on obtient aussi $X' = P^{-1}X$.

   (b) Application : prenons $u = (4,-5) \in \mathbb{R}^2$. Trouver X et trouver X'.

   • On a $X = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

   • Pour trouver X', on calcule d'abord P^{-1}. On trouve facilement $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Ainsi, $X' = P^{-1}X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -9 \end{pmatrix}$.

2. *Cette question est une adaptation de la démonstration de cours que vous deviez connaitre.*

   Considérons
   — $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *une base de* E.
   — $F = \mathbb{R}^2$ et $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ *une base de* F.
   — $f \in \mathscr{L}(E, F)$ *dont la matrice dans la base* $\mathscr{B}$ *au départ et* $\mathscr{B}'$ *à l'arrivée est* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.
   — Soit $Q \in E$. *On note* $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$ *la matrice colonne formée des coordonnées de* Q *dans la base* $\mathscr{B}$ et Y *la matrice colonne formée des coordonnées de* $f(Q)$ *dans la base* $\mathscr{B}'$

   (a) *Écrire* $f(e_1)$, $f(e_2)$ *et* $f(e_3)$ *en fonction de* ε_1, ε_2 *et des coefficients de la matrice* A.

   • Par définition de la matrice d'une application linéaire, on a $f(e_1) = a_{1,1}\varepsilon_1 + a_{2,1}\varepsilon_2$.

   • De même : $f(e_2) = a_{1,2}\varepsilon_1 + a_{2,2}\varepsilon_2$ et $f(e_3) = a_{1,3}\varepsilon_1 + a_{2,3}\varepsilon_2$.

   (b) *En déduire* $f(Q)$ *comme combinaison linéaire de* ε_1 *et* ε_2.

   On a $Q = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$.
   D'où, par linéarité de f,
   $$\begin{aligned} f(Q) &= \lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) + \lambda_3 f(e_3) \\ &= \lambda_1 (a_{1,1}\varepsilon_1 + a_{2,1}\varepsilon_2) + \lambda_2 (a_{1,2}\varepsilon_1 + a_{2,2}\varepsilon_2) + \lambda_3 (a_{1,3}\varepsilon_1 + a_{2,3}\varepsilon_2) \\ &= (\lambda_1 a_{1,1} + \lambda_2 a_{1,2} + \lambda_3 a_{1,3})\,\varepsilon_1 + (\lambda_1 a_{2,1} + \lambda_2 a_{2,2} + \lambda_3 a_{2,3})\,\varepsilon_1 \end{aligned}$$

   (c) *En déduire alors la formule matricielle qui donne* Y *en fonction de* A *et de* X.

   De la question précédente, on en déduit que

   $$Y = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{1,1} + \lambda_2 a_{1,2} + \lambda_3 a_{1,3} \\ \lambda_1 a_{2,1} + \lambda_2 a_{2,2} + \lambda_3 a_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad Y = AX$$

   (d) *Application : Prenons* $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ *et* $\mathscr{B}' = ((1,1),(2,1))$ *et* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *(même contexte que précédemment).*
   Trouver les réels x *et* y *tels que* $f(1 + 4X - 4X^2) = (x, y)$.

   Posons $Q = 1 + 4X - 4X^2$. On a $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$. Ainsi, $Y = AX = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   D'où, $f(Q) = -3(1,1) + 0(2,1) = (-3,-3)$. On a donc $x = y = -3$.

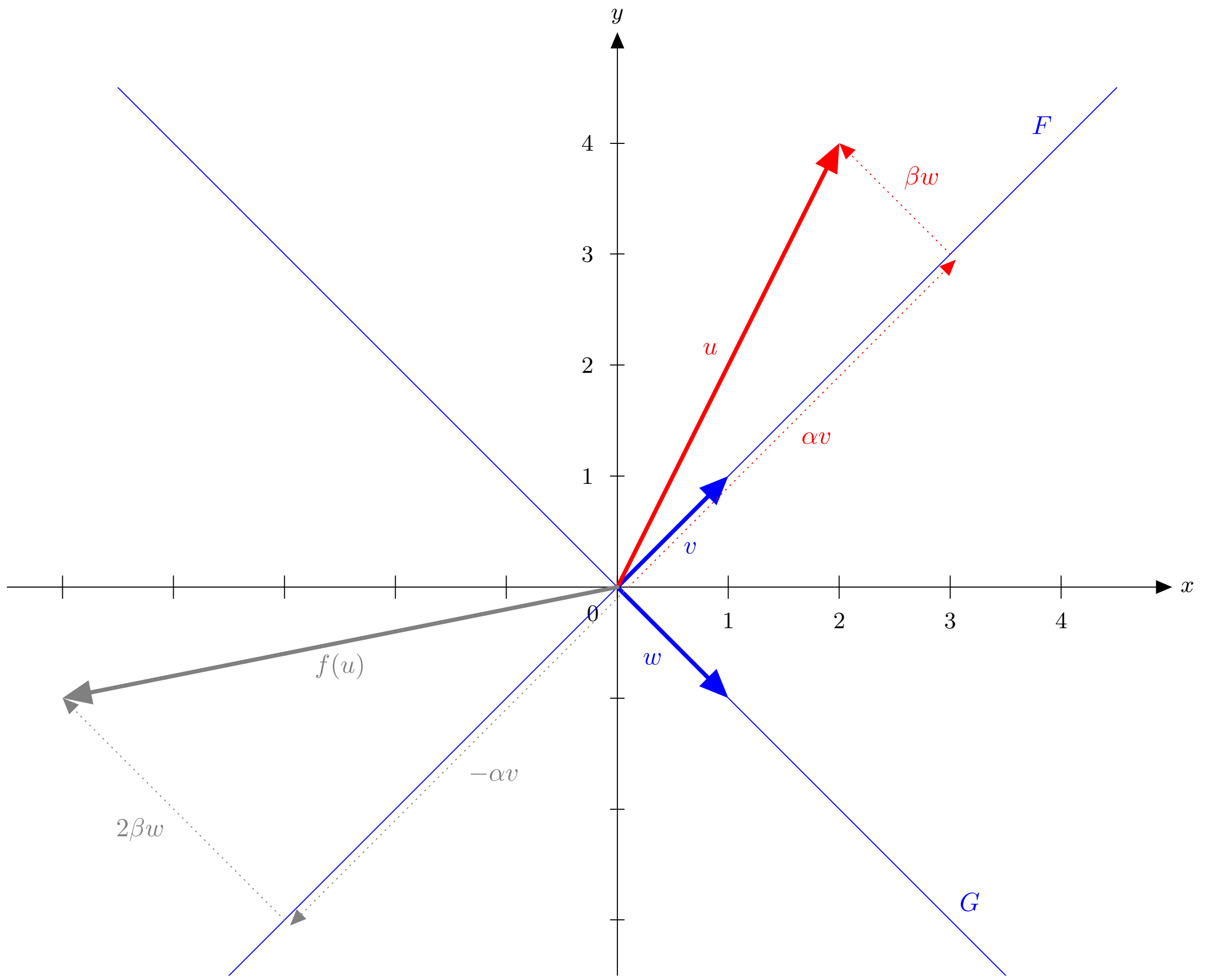
Exercice 6 : exemple d'application linéaire

Dans $\mathbb{R}^2$, *soient* $F = Vect((1,1))$ *et* $G = Vect((1,-1))$. *On admet que* $F \oplus G = \mathbb{R}^2$ *et que* $\mathscr{B} = (v = (1,1), w = (1,-1))$ *est une base de* $\mathbb{R}^2$.
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ *dont la matrice dans la base* $\mathscr{B}$ *au départ et à l'arrivée est* $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *Soit* $u \in \mathbb{R}^2$. *On sait alors qu'il existe un unique couple* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $u = \alpha v + \beta w$. *Donner* $f(u)$ *en fonction de* v, w, α *et* β.

   Par linéarité de f et par définition de la matrice A, on a $f(u) = f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w) = \alpha(-v) + \beta(2w) = -\alpha v + 2\beta w$.

2. *Dessiner ci-dessous,* F, G, v, w *et* $u = (2,4)$. *Graphiquement trouver* α, β *et* $f(u)$ *en faisant apparaitre tous les traits de construction.*



On trouve $\alpha = 3$, $\beta = -1$, c'est-à-dire $u = 3(1,1) - (1,-1)$.

Puis $f(u) = -3(1,1) - 2(1,-1) = (-5,-1)$.