EPITA

Mathématiques

Partiel S2

durée : 3 heures

Mai 2022

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 40 points. La note sera ramenée à une note sur 20 par une simple division par 2.

Consignes :

— Lire le sujet en entier avant de commencer. Il y a en tout 7 exercices.
— **La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
— Vous devez répondre directement sur les feuilles jointes. **Pensez à regarder la taille (souvent surestimée) réservée à la réponse avant de commencer à rédiger**.
— Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.
— Documents et calculatrices interdits.
— Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 (6,5 points)

1. Rappeler les développements limités en 0 à l'ordre 4 de e^u, $\cos(u)$, $\sin(u)$, $\ln(1+u)$ et $\sqrt{1+u}$.

2. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $f(x) = \ln(1-2x)\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

3. Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $g(x) = \sqrt{1+\cos(2x)}$.

Exercice 2 (4 points)

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(2x^2) - 1}{e^x - e^{-x} - 2x}$

2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x^2}} - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \right)$.

Exercice 3 (5 points)

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique au départ et à l'arrivée est $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Inverser A.

2. L'endomorphisme f est-il bijectif ? Justifier. Si oui, donner l'expression de f^{-1}.

....
....
....
....
....
....

3. Imaginons que A corresponde aussi à la matrice de $g \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3\right)$ dans les bases canoniques au départ et à l'arrivée. Quelle est l'expression de g ? Justifier brièvement.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 4 (5 points)

Dans cet exercice, les deux questions sont indépendantes.

1. On se place dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on considère les familles suivantes :

$$\mathcal{F}_1 = \left(P_1 = 1, P_2 = X^2 + X, P_3 = -X^2 - X - 2\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_2 = \left(Q_1 = 1, Q_2 = X^2 + X + 1, Q_3 = X^2 - X\right)$$

Ces familles sont-elles des bases de E ? Justifiez rigoureusement votre réponse. Si oui, donner les coordonnées de $P = -X^2 + 7X + 5$ dans la(les) base(s) trouvée(s).

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

[suite des lignes page suivante]

2. On se place dans $\mathbb{R}^3$. Soient les vecteurs $u = (2, 3, -1)$ et $v = (1, -1, -2)$.

   (a) La famille (u, v) est-elle une base de $G = \mathrm{Vect}(u, v)$? Justifier.

   (b) Trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $w = (-15, 5, a) \in G$.

Exercice 5 (8 points)

On considère l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(0), P'(1)) \end{array} \right.$

1. Trouver une base du noyau de f. En déduire sa dimension.

2. Énoncer en toute généralité le théorème du rang. En déduire la dimension de l'image de f dans notre cas.

3. f est-elle injective ? f est-elle surjective ? Justifier.

4. Donner la matrice de f dans les bases canoniques au départ et à l'arrivée.

5. Donner la matrice de f dans la base canonique au départ et la base $((2,1),(-1,-1))$ à l'arrivée.

Exercice 6 (8 points)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique au départ et à l'arrivée est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

On note C_1, C_2 et C_3 les trois vecteurs colonnes de A.

1. La famille (C_1, C_2, C_3) est-elle libre ? Sinon, en extraire une famille libre maximale.

2. En déduire une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathrm{Im}(f)$ et une base $\mathcal{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(f)$. Donner leur dimension.

3. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}^3$. On crée alors la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ en réunissant les vecteurs de $\mathcal{B}_1$ et de $\mathcal{B}_2$.

4. Calculer A^2. Comment f s'appelle-t-elle ?

5. Des questions 3. et 4., donner l'image par f d'un vecteur quelconque de $\mathrm{Im}(f)$ puis d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$.

6. En déduire, sans calcul, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée.

Exercice 7 (3,5 points)

On considère $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathrm{Vect}\,((1,1))$ et $G = \mathrm{Vect}\,((1,-1))$. On admet que $F \oplus G = E$. Ainsi, $\forall\, u \in E$, $\exists\,!(v,w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$.

On définit l'application linéaire $s : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & v - w \end{array} \right.$

1. Pour $u = (1,3) \in \mathbb{R}^2$, trouver v et w. En déduire $s(u)$.

2. Dessiner F et G dans $\mathbb{R}^2$. Placer le vecteur $u = (1,3)$. Expliquer comment, graphiquement, on retrouve v, w et $s(u)$ (les dessiner aussi). À votre avis, comment peut-on appeler l'endomorphisme s ?