Correction Partiel S2 2022

Exercice 1

1. *Rappeler les développements limités en 0 à l'ordre 4 de e^u, $\cos(u)$, $\sin(u)$, $\ln(1+u)$ et $\sqrt{1+u}$.*

$$\begin{aligned}
e^u &= 1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\frac{u^4}{4!}+o(u^4)\\
\cos(u) &= 1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}+o(u^4)\\
\sin(u) &= u-\frac{u^3}{3!}+o(u^4)\\
\ln(1+u) &= u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\frac{u^4}{4}+o(u^4)\\
\sqrt{1+u} &= 1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+\frac{u^3}{16}-\frac{5u^4}{128}+o(u^4)
\end{aligned}$$

2. *Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $f(x)=\ln(1-2x)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$.*

$$f(x)=\left(-2x-2x^2-\frac{8}{3}x^3-4x^4+o(x^4)\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{x^3}{48}+o(x^4)\right)=-x^2+\frac{x^4}{24}-x^3-\frac{4x^4}{3}+o(x^4)=-x^2-x^3-\frac{31x^4}{24}+o(x^4)$$

3. *Donner le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $g(x)=\sqrt{1+\cos(2x)}$.*
On a
$$g(x)=\sqrt{1+1-2x^2+\frac{2x^4}{3}+o(x^4)}=\sqrt{2\left(1-x^2+\frac{x^4}{3}+o(x^4)\right)}=\sqrt{2}\times\sqrt{1-x^2+\frac{x^4}{3}+o(x^4)}$$

Posons $u=-x^2+\frac{x^4}{3}+o(x^4)$. Ainsi, $u^2=x^4+o(x^4)$. D'où
$$f(x)=\sqrt{2}\times\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)\right)=\sqrt{2}\times\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}x^2}{2}+\frac{\sqrt{2}x^4}{24}+o(x^4)$$

Exercice 2

1. *Calculer* $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x^2)-1}{e^x-e^{-x}-2x}$

- $N(x)=\cos(2x^2)-1=-2x^4+o(x^4)$. Ainsi, $N(x)\sim -2x^4$ au voisinage de 0.
- $D(x)=e^x-e^{-x}-2x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)-\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-2x=\frac{x^3}{3}+o(x^3)$. D'où, en 0, $D(x)\sim\frac{x^3}{3}$.
- Par conséquent, $\frac{N(x)}{D(x)}\sim\frac{-2x^4}{\frac{x^3}{3}}=-6x\underset{x\longrightarrow 0}{\longrightarrow}0$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x^2)-1}{e^x-e^{-x}-2x}=0$.

2. *Calculer* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{x^2}}-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.
On a $x^2\left(e^{\frac{1}{x^2}}-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)=x^2\left(1+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)-\left(1-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)=x^2\left(\frac{3}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=\frac{3}{2}+o(1)$.
Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{x^2}}-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{3}{2}$.

Exercice 3

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique au départ et à l'arrivée est $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. *Inverser A.*

   Soient $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ deux vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^3$.

   On a

$$AU = V \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & 3z & = & X \\ 4x & + & 3y & + & 5z & = & Y \\ -x & - & 2y & - & 2z & = & Z \end{array} \right.$$

   En faisant $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \longleftarrow 2L_3 + L_1$, le système est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & 3z & = & X \\ & - & y & - & z & = & Y - 2X \\ & - & 2y & - & z & = & 2Z + X \end{array} \right.$$

   Puis, on effectue $L_3 \longleftarrow L_2 - L_3$. On obtient alors

$$AU = V \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & 3z & = & X \\ & - & y & - & z & = & Y - 2X \\ & & y & & & = & -3X + Y - 2Z \end{array} \right.$$

   Le système étant échelonné, il suffit maintenant de le remonter. On a alors

$$AU = V \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -4X + 2Y - Z \\ y & = & -3X + Y - 2Z \\ z & = & 5X - 2Y + 2Z \end{array} \right. \iff U = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} V \iff U = A^{-1}V$$

   Ainsi, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Il faut penser à faire une vérification au brouillon !!

2. *L'endomorphisme f est-il bijectif ? Justifier. Si oui, donner l'expression de f^{-1}.*

   Puisque A est la matrice de f dans la base canonique au départ et à l'arrivée et que A est inversible, on en déduit que f est bijective. Ainsi, A^{-1} est la matrice de f^{-1} dans la base canonique au départ et à l'arrivée. Du coup,

$$f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (-4x + 2y - z, -3x + y - 2z, 5x - 2y + 2z) \end{array} \right.$$

3. *Imaginons que A corresponde aussi à la matrice de $g \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3\right)$ dans les bases canoniques au départ et à l'arrivée. Quelle est l'expression de g ? Justifier brièvement.*

   Les colonnes de A donnent $g(1) = (2, 4, -1)$, $g(X) = (2, 3, -2)$ et $g(X^2) = (3, 5, -2)$.
   Ainsi, pour tout $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, $g(P) = ag(X^2) + bg(X) + cg(1)$ par linéarité de g. Cela donne :
   $g(P) = (3a + 2b + 2c, 5a + 3b + 4c, -2a - 2b - c)$. Par conséquent

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ aX^2 + bX + c & \longmapsto & (3a + 2b + 2c, 5a + 3b + 4c, -2a - 2b - c) \end{array} \right.$$

Exercice 4

Dans cet exercice, les deux questions sont indépendantes.

1. *On se place dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on considère les familles suivantes :*

$$\mathcal{F}_1 = \big(P_1 = 1, P_2 = X^2 + X, P_3 = -X^2 - X - 2\big) \quad \textit{et} \quad \mathcal{F}_2 = \big(Q_1 = 1, Q_2 = X^2 + X + 1, Q_3 = X^2 - X\big)$$

Ces familles sont-elles des bases de E ? Justifiez rigoureusement votre réponse. Si oui, donner les coordonnées de $P = -X^2 + 7X + 5$ dans la(les) base(s) trouvée(s).

• On a $-P_2 - 2P_1 = P_3$ ainsi $\mathcal{F}_1$ est liée et ce n'est pas une base de E.

• Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha Q_1 + \beta Q_2 + \gamma Q_3 = 0_E$. On a en développant, $\alpha + \beta + (\beta - \gamma) X + (\beta + \gamma) X^2 = 0_E$. D'où $\begin{cases} \alpha + \beta &= 0 \\ \beta - \gamma &= 0 \\ \beta + \gamma &= 0 \end{cases}$. Cela donne $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
On en déduit que $\mathcal{F}_2$ est une famille libre. Comme $\mathrm{Card}(\mathcal{F}_2) = 3 = \dim(E)$, on conclut que $\mathcal{F}_2$ est une base de E.

•. Soit $P = -X^2 + 7X + 5 \in E$. On cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = \alpha Q_1 + \beta Q_2 + \gamma Q_3$. En se servant du système précédent, on résout $\begin{cases} \alpha + \beta &= 5 \\ \beta - \gamma &= 7 \\ \beta + \gamma &= -1 \end{cases}$, ce qui donne $\alpha = 2$, $\beta = 3$ et $\gamma = -4$.
En conclusion, les coordonnées de P dans la base $\mathcal{F}_2$ sont $(2, 3, -4)$.

2. *On se place dans $\mathbb{R}^3$. Soient les vecteurs $u = (2, 3, -1)$ et $v = (1, -1, -2)$.*

   (a) *La famille (u, v) est-elle une base de $G = Vect(u, v)$? Justifier.*

   (u, v) est par définition une famille génératrice de G. Comme u et v ne sont pas colinéaires, la famille (u, v) est libre. C'est donc une base de G.

   (b) *Trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $w = (-15, 5, a) \in G$.*

   On cherche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $w = \alpha u + \beta v$, ce qui revient à $(-15, 5, a) = (2\alpha + \beta, 3\alpha - \beta, -\alpha - 2\beta)$. On doit donc résoudre le système $\begin{cases} 2\alpha + \beta &= -15 \\ 3\alpha - \beta &= 5 \\ -\alpha - 2\beta &= a \end{cases}$
   Les deux premières équations donnent $\alpha = -2$ et $\beta = -11$. Ainsi, la dernière équation donne $a = 24$.

Exercice 5

On considère l'application linéaire $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \quad \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto \quad (P(0), P'(1)) \end{cases}$

1. *Trouver une base du noyau de f. En déduire sa dimension.*

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f) &= \big\{P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X], P(0) = P'(1) = 0\big\} \\ &= \big\{aX^2 + bX + c, c = 0,\ 2a + b = 0\big\} \\ &= \big\{aX^2 - 2aX, a \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{a(X^2 - 2X), a \in \mathbb{R}\big\} = \mathrm{Vect}\left(X^2 - 2X\right) \end{aligned}$$

D'où la famille $(X^2 - 2X)$ est génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$. Ce vecteur étant non nul, il forme une famille libre. $(X^2 - 2X)$ est donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$. On a $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

2. *Énoncer en toute généralité le théorème du rang. En déduire la dimension de l'image de f dans notre cas.*

• Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels avec E de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

• Par ce théorème, on a $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3 - 1 = 2$.

3. *f est-elle injective ? f est-elle surjective ? Justifier.*

• Comme $\text{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$, f n'est pas injective.
• Comme $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$ et $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$, on a $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$, ce qui signifie que f est surjective.

4. *Donner la matrice de f dans les bases canoniques au départ et à l'arrivée.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. *Donner la matrice de f dans la base canonique au départ et la base $((2,1),(-1,-1))$ à l'arrivée.*

On a $f(1) = (1,0) = 1(2,1)+1(-1,-1)$, $f(X) = (0,1) = -1(2,1)-2(-1,-1)$ et $f(X^2) = (0,2) = -2(2,1)-4(-1,-1)$.
On en déduit que la matrice cherchée est $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

Exercice 6

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique au départ et à l'arrivée est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

On note C_1, C_2 et C_3 les trois vecteurs colonnes de A.

1. *La famille (C_1, C_2, C_3) est-elle libre ? Sinon, en extraire une famille libre maximale.*

• On a $C_3 = C_1 + C_2$ d'où la famille (C_1, C_2, C_3) est liée.
• Éliminons C_3. Comme C_1 et C_2 ne sont pas colinéaires, ils forment une famille libre. (C_1, C_2) est une famille libre maximale.

2. *En déduire une base $\mathcal{B}_1$ de Im(f) et une base $\mathcal{B}_2$ de Ker(f). Donner leur dimension.*

• On sait que $\text{Im}(f) = \text{Vect}((C_1, C_2, C_3)) = \text{Vect}((C_1, C_2))$. Ainsi, (C_1, C_2) est génératrice et libre (par 1.) de $\text{Im}(f)$, c'est donc une base. On a donc $\dim(\text{Im}(f)) = 2$.
• Par le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 2 = 1$.
Comme $C_1+C_2-C_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$, on en déduit que $(1,0,0)+(0,1,0)-(0,0,1) = (1,1,-1) \in \text{Ker}(f)$. Comme $(1,1,-1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, il forme une famille libre de cardinal 1 dans $\text{Ker}(f)$ qui est de dimension 1. C'est donc une base de $\text{Ker}(f)$.

3. *Montrer que Im$(f) \oplus$ Ker$(f) = \mathbb{R}^3$. On crée alors la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ en réunissant les vecteurs de $\mathcal{B}_1$ et de $\mathcal{B}_2$.*

• Soit $u \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$. On a $u \in \text{Im}(f)$ et $u \in \text{Ker}(f)$. Ainsi, $\exists\,(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = \alpha C_1 + \beta C_2 = (\alpha+\beta, 2\beta, -\beta)$ et $u = \gamma(1,1,-1) = (\gamma, \gamma, -\gamma)$. Par conséquent, on a $\alpha + \beta = \gamma$, $2\beta = \gamma$ et $-\beta = \gamma$. Cela donne $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Donc $u = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a montré que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) \subset \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. L'inclusion dans l'autre sens étant toujours vraie dans ce cas, on a obtenu : $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

• On sait que $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) \subset \mathbb{R}^3$. Or

$$\dim(\text{Ker}(f) + \text{Im}(f)) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) - \dim(\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)) = 1 + 2 - 0 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

Ainsi, $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

• En conclusion, $\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = \mathbb{R}^3$.

4. *Calculer A^2. Comment f s'appelle-t-elle ?*

• On a $A^2 = A$. Comme A est la matrice de f dans la base canonique au départ et à l'arrivée, on a $f \circ f = f$. On en déduit que f est un projecteur, c'est-à-dire une projection sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\text{Ker}(f)$.

5. *Des questions 3. et 4., donner l'image par f d'un vecteur quelconque de Im(f) puis d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$.*

• Soit $v \in \text{Im}(f)$. $\exists\, v_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $v = f(v_1)$. Ainsi, $f(v) = f \circ f(v_1) = f(v_1) = v$.

• Soit $u \in \mathbb{R}^3$. $\exists!\,(v, w) \in \text{Im}(f) \times \text{Ker}(f)$ tel que $u = v + w$. Ainsi, $f(u) = f(v) + f(w) = v + 0_{\mathbb{R}^3} = v$.

6. *En déduire, sans calcul, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée.*

On a $\mathcal{B} = (C_1, C_2, (1,1,-1))$. $f(C_1) = C_1$, $f(C_2) = C_2$ (car ils sont dans l'image de f) et $f((1,1,-1)) = 0_{\mathbb{R}^3}$. On en déduit la matrice suivante dans la base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

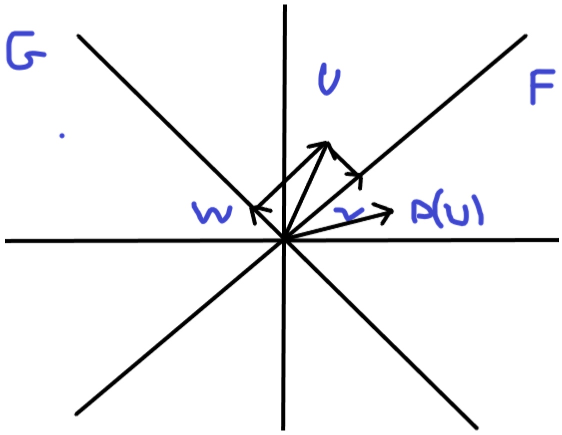
Exercice 7

On considère $E = \mathbb{R}^2$*,* $F = Vect((1,1))$ *et* $G = Vect((1,-1))$*. On admet que* $F \oplus G = E$*. Ainsi,* $\forall u \in E$*,* $\exists!(v,w) \in F \times G$ *tel que* $u = v + w$*.*

On définit l'application linéaire $s : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & v - w \end{array} \right.$

1. *Pour* $u = (1,3) \in \mathbb{R}^2$*, trouver* v *et* w*. En déduire* $s(u)$*.*
   - On $u = (1,3) = (2,2) + (-1,1)$ ainsi $v = (2,2)$ et $w = (-1,1)$.
   - Ainsi, $s(u) = v - w = (3,1)$.
2. *Dessiner* F *et* G *dans* $\mathbb{R}^2$*. Placer le vecteur* $u = (1,3)$*. Expliquer comment, graphiquement, on retrouve* v*,* w *et* $s(u)$ *(les dessiner aussi). À votre avis, comment peut-on appeler l'endomorphisme* s *?*

   Le dessin ci-dessous n'est pas forcément à l'échelle mais vous donne une idée !

   s est une symétrie par rapport à F parallèlement à G.