Exercice 1 (4,5 points)

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$.

a. Déterminer pour chacune des familles suivantes s'il s'agit d'une base de E.

$\mathcal{F}_1 = \{P_1(X) = 2X + 1,\ P_2(X) = X^2 + X + 2,\ P_3(X) = X^2 + X + 1,\ P_4(X) = 2X^2 + 3\}$

$\mathcal{F}_2 = \{Q_1(X) = X^2 + 2,\ Q_2(X) = X^2 + 4X,\ Q_3(X) = X^2 + 3X + 2\}$

$\mathcal{F}_3 = \{R_1(X) = -X^2 + 2,\ R_2(X) = X^2 - 4X,\ R_3(X) = X^2 - 2X - 1\}$

$\mathcal{F}_1$
$\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$ donc toutes des bases de $\mathbb{R}_2[X]$ sont composées de 3 polynômes.
$\operatorname{card} \mathcal{F}_1 = 4$, ce n'est pas une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

$\mathcal{F}_2$
Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $\quad \alpha Q_1 + \beta Q_2 + \gamma Q_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \iff$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = 0 \\ 4\beta + 3\gamma & = 0 \\ 2\alpha + 2\gamma & = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

$\mathcal{F}_2$ est libre. $\operatorname{card} \mathcal{F}_2 = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ donc $\mathcal{F}_2$ est libre et génératrice : c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

$\mathcal{F}_3$

Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $\quad \alpha R_1 + \beta R_2 + \gamma R_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]} \iff \begin{cases} -\alpha + \beta + \gamma & = 0 \\ -4\alpha - 2\gamma & = 0 \\ 2\alpha - \gamma & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\alpha - \alpha + 2\alpha = 0 \\ \beta = -\alpha \\ \gamma = 2\alpha \end{cases}$

$\alpha = 1,\ \beta = -1,\ \gamma = 2$ est une solution non nulle du système donc $R_1 - R_2 + 2R_3 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$
$\mathcal{F}_3$ n'est pas libre ce n'est pas une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Déterminer les coordonnées du polynôme $P(X) = 2X^2 + X + 8$ dans chacune des bases identifiées ci-dessus.

Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, $\quad \alpha Q_1 + \beta Q_2 + \gamma Q_3 = P \iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = 2 \\ 4\beta + 3\gamma & = 1 \\ 2\alpha + 2\gamma & = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha & = 1 \\ \beta & = -2 \\ \gamma & = 3 \end{cases}$

Donc $Q_1 - 2Q_2 + 3Q_3 = P$ $\quad$ Les coordonnées de P dans la base $\mathcal{F}_2$ sont $(1, -2, 3)$.

Exercice 2 (2,5 points)

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ **et** $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax^2 + bx + c \end{cases}$

Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur (a, b, c) pour que φ soit linéaire.
Démontrez votre réponse.

$\boxed{\Longrightarrow}$
$\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) \Longrightarrow \varphi(0) = 0 \Longrightarrow c = 0$
$\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) \Longrightarrow \varphi(2 \times 1) = 2\varphi(1) \Longrightarrow 4a + 2b = 2a + 2b \Longrightarrow a = 0$

$\boxed{\Longleftarrow}$
$a = c = 0 \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = bx \Longrightarrow$
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \varphi(\lambda x + y) = b(\lambda x + y) = \lambda bx + by = \lambda\varphi(x) + \varphi(y)$.

Ainsi φ est linéaire ssi $a = c = 0$.

Exercice 3 (5 points)

On considère $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, le $\mathbb{R}$-ev des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et deux sous-ensembles de E : $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires ($\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$) et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires ($\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$).

a. Montrer que $\mathcal{P}$ est un sev de E. (On admettra que $\mathcal{I}$ est aussi un sev de E)

Soient $(f, g) \in \mathcal{P}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad (\lambda f + g)(-x) = \lambda f(-x) + g(-x) = \lambda f(x) + g(x) = (\lambda f + g)(x)$
$\mathcal{P}$ est stable par combinaison linéaire : c'est un sev de E.

b. Montrer à l'aide d'un contre-exemple que $\mathcal{P} \cup \mathcal{I} \neq E$

Soit f définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + 1 : f \in E$
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -x + 1 \neq f(x) \Longrightarrow f \notin \mathcal{P} \quad$ et $\quad f(-x) \neq -f(x) \Longrightarrow f \notin \mathcal{I}$
$f \in E \quad$ et $\quad f \notin \mathcal{P} \cup \mathcal{I} \quad$ donc $\quad \mathcal{P} \cup \mathcal{I} \neq E$.

c. À partir d'une fonction $f \in E$, on définit les deux fonctions :

$$f_p : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \end{cases} \quad \textbf{et} \quad f_i : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{cases}.$$

Montrer que f_p est paire et f_i impaire. Calculer $f_p + f_i$.

$$f_p(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = f_p(x) \quad \text{et} \quad f_i(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = -f_i(x)$$

Donc $f_p \in \mathcal{P} \quad$ et $\quad f_i \in \mathcal{I}$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_p(x) + f_i(x) = f(x) \quad$ donc $\quad f = f_p + f_i$

d. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires dans E.

$$\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = E \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0_E\} \\ \mathcal{P} + \mathcal{I} = E \end{cases}$$

$\{0_E\} \subset \mathcal{P} \cap \mathcal{I}$ car ce sont deux sev de E.

$$\forall f \in \mathcal{P} \cap \mathcal{I}, \quad \begin{cases} f \in \mathcal{P} \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x) \\ f \in \mathcal{I} \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x) \end{cases} \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -f(x) \Longrightarrow f(x) = 0$$

Donc $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0_E\}$.

$\mathcal{P} + \mathcal{I} \subset E$ car ce sont deux sev de E.
$\forall f \in E, \quad \exists f_p \in \mathcal{P}$ et $\exists f_i \in \mathcal{I}, \quad f = f_p + f_i \quad$ donc $\quad f \in \mathcal{P} + \mathcal{I}$
$\mathcal{P} + \mathcal{I} = E$

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 4 (4 points)

$$\textbf{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ (a,b,c) & \longmapsto & (a+b)X^4 + (2a-c)X^2 + (a+b+c) \end{cases}$$

a. Déterminer $\operatorname{Ker} f$, $\dim \operatorname{Ker} f$ et $\dim \operatorname{Im} f$.

$$(a,b,c) \in \operatorname{Ker} f \Longleftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 2a-c=0 \\ a+b+c=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$$

$\dim \operatorname{Ker} f = 0$

D'après le théorème du rang : $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 \quad \Longrightarrow \quad \dim \operatorname{Im} f = 3$.

b. f est-elle injective ?

$\dim \operatorname{Ker} f = 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ est injective.

c. f est-elle surjective ?

$\dim \operatorname{Im} f = 3$ et $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie. Donc $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}[X]$ f n'est pas surjective.

Exercice 5 (4 points)

Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ l'application linéaire associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques au départ et à l'arrivée.
On note $\mathcal{B}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_4$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
On définit : $\mathcal{D}_3 = \{u_1, u_2, u_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$ où $u_1 = (1, -1, 0),\ u_2 = (1, 0, 1),\ u_3 = (0, 1, -1)$
et $\mathcal{D}_4 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ base de $\mathbb{R}^4$ où $v_1 = (0, 0, 0, 1),\ v_2 = (1, 0, 0, 1),\ v_3 = (1, 2, 1, 2),\ v_4 = (0, 3, 0, 3)$.

a. Quelle est l'image des vecteurs de $\mathcal{B}_3$ par g ?

$g(e_1) = (1, 2, 1, 2) \qquad g(e_2) = (0, 3, 0, 3) \qquad g(e_3) = (1, 0, 0, 1)$

b. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, calculer $g\left((x, y, z)\right)$.

$g\left((x, y, z)\right) = g\left(xe_1 + ye_2 + ze_3\right) = xg(e_1) + yg(e_2) + zg(e_3) = (x + z, 2x + 3y, x, 2x + 3y + z)$

c. Déterminer la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$ au départ et $\mathcal{D}_4$ à l'arrivée.

On observe que : $g(e_1) = v_3 \qquad g(e_2) = v_4 \qquad g(e_3) = v_2$ donc :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_3\mathcal{D}_4}(h) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d. Déterminer la matrice de g dans la base $\mathcal{D}_3$ au départ et $\mathcal{D}_4$ à l'arrivée.

$g(u_1) = g(e_1 - e_2) = g(e_1) - g(e_2) = v_3 - v_4$
$g(u_2) = g(e_1 + e_3) = g(e_1) + g(e_3) = v_3 + v_2$
$g(u_3) = g(e_2 - e_3) = g(e_2) - g(e_3) = v_4 - v_2$ donc :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{D}_3\mathcal{D}_4}(h) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 (4 points)

Soit $h : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto \quad (2x + 3y + z, x - z, x + y) \end{cases}$

a. Déterminer la matrice M associée à h dans la base canonique au départ et à l'arrivée.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b. On appelle C_1, C_2, C_3 les vecteurs colonnes de cette matrice. La famille $\{C_1, C_2, C_3\}$ est-elle libre ? Sinon, en extraire une famille libre maximale.

On observe que : $C_1 + C_3 = C_2 \quad \Longleftrightarrow C_1 - C_2 + C_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ La famille $\{C_1, C_2, C_3\}$ est liée.
On peut par exemple enlever C_2. $\{C_1, C_3\}$ est libre (2 vecteurs, non colinéaires) : c'est une famille libre maximale.

c. En déduire $\operatorname{Im} h$, $\operatorname{rg}(h)$ et $\operatorname{Ker} h$.

$\operatorname{Im} h = \operatorname{Vect}\{C_1, C_2, C_3\} = \operatorname{Vect}\{C_1, C_3\}$
La famille $\{C_1, C_3\}$ est une famille libre et génératrice de $\operatorname{Im} h$: c'est une base de $\operatorname{Im} h$. $\dim \operatorname{Im} h = 2$.

D'après le théorème du rang : $\dim \operatorname{Ker} h + \dim \operatorname{Im} h = \dim \mathbb{R}^3$ donc $\dim \operatorname{Ker} h = 1$.

$C_1 - C_2 + C_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Longrightarrow e_1 - e_2 + e_3 \in \operatorname{Ker} h \Longleftrightarrow (1, -1, 1) \in \operatorname{Ker} h$.
$\{(1, -1, 1)\}$ est une famille libre de $\operatorname{Ker} h$ et $\operatorname{card}\{(1, -1, 1)\} = \dim \operatorname{Ker} h = 1$ C'est une base de $\operatorname{Ker} h$.
$\operatorname{Ker} h = \operatorname{Vect}\{(1, -1, 1)\}$.

Exercice 7 (3 points)

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = \{(1, 3, -3); (6, 2, -7); (1, 0, -1)\}$ une autre base de $\mathbb{R}^3$.

Soit f l'application linéaire associée à la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -3 & -7 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique au départ et à l'arrivée.

a. Sans aucun calcul, que peut-on dire du rang de f ? Comment appelle-t-on la matrice P ?

$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect} \mathcal{B}' = \mathbb{R}^3$ car $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donc $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = 3$.

P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$.

b. Déterminer P^{-1} la matrice inverse de P, sans oublier de vérifier votre résultat.

$P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \\ -15 & -11 & -16 \end{pmatrix}$ On vérifie que $P^{-1}P = I_3$.

Exercice 8 (4 points)

Soit $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & \left(\frac{1}{2}(x - z), y, \frac{1}{2}(z - x)\right) \end{array} \right.$

a. Montrer que f est un projecteur.

f est un projecteur ssi $f \circ f = f$
$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f \circ f\left((x, y, z)\right) = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x - z) - \frac{1}{2}(z - x)\right), y, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(z - x) - \frac{1}{2}(x - z)\right)\right) = f\left((x, y, z)\right)$.
f est un projecteur

b. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sous forme d'espaces vectoriels engendrés et en déduire une base $\mathcal{B}_1$ de $\operatorname{Ker} f$ et une base $\mathcal{B}_2$ de $\operatorname{Im} f$.

$\operatorname{Ker} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \left(\frac{1}{2}(x - z), y, \frac{1}{2}(z - x)\right) = (0, 0, 0)\}$. $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\{(1, 0, 1)\}$.
$\{(1, 0, 1)\}$ est une famille libre et génératrice de $\operatorname{Ker} f$. C'est une base de $\operatorname{Ker} f$.

$\operatorname{Im} f = \{\left(\frac{1}{2}(x - z), y, \frac{1}{2}(z - x)\right); (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$.
$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}); (0, 1, 0); (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})\} = \{(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}); (0, 1, 0)\}$.
$\{(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}); (0, 1, 0)\}$ est une famille libre et génératrice de $\operatorname{Im} f$. C'est une base de $\operatorname{Im} f$.

c. On admet que la réunion des vecteurs de ces deux bases $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée.

$\mathcal{B} = \{(1,0,1); (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}); (0,1,0)\}$
$f\left((1,0,1)\right) = (0,0,0) \qquad f\left((\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2})\right) = (\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}) \qquad f\left((0,1,0)\right) = (0,1,0)$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$