Partiel

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1 (2 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.
Déterminer la matrice A^{-1} en prenant soin de vérifier (au brouillon) le résultat final.

Exercice 2 (3 points)

On se palce dans $\mathbb{R}_2[X]$. Dans les trois questions suivantes, vos réponses doivent être justifiées.

1. $\mathscr{B}_1 = (X^2+X,\ X+3)$ engendre-t-elle $\mathbb{R}_2[X]$?
2. $\mathscr{B}_2 = (2,\ X+1,\ 2X^2,\ X^2+3)$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$?
3. $\mathscr{B}_3 = (1,\ X+1,\ X^2+2X)$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 3 (3 points)

Soient E, F deux $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des $\mathbb{R}$-ev.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
3. Montrer que f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Exercice 4 (3 points)

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, x-y-3z) \end{array} \right.$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau de f et exhiber une de ses bases.
3. En déduire, via le théorème du rang, la dimension de l'image de f puis en déduire l'image de f.

Exercice 5 (3 points)

Les familles suivantes sont-elles libres ? Justifiez votre réponse.

1. Dans $\mathbb{R}^3$: $((1,-2,3),\ (-1,-2,1),\ (5,2,3))$.
2. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $(f : x \mapsto x\ ,\ g : x \mapsto x^2\ ,\ h : x \mapsto e^{2x})$.
3. Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$: (A,B) où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 (4 points)

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (3x-5y,-2y) \end{array} \right.$.

On note $\mathscr{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{B}_2 = \big((1,1), (-1,0)\big)$ une autre base de $\mathbb{R}^2$.
De plus, on note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^2$

1. Déterminer $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(f)$, matrice de f relativement à la base $\mathscr{B}_1$.
2. Déterminer $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(f)$, matrice de f relativement à la base $\mathscr{B}_2$.
3. Expliquer pourquoi $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_1}(id) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note P cette matrice.
4. Inverser P puis calculer $P^{-1}AP$. Que remarquez-vous ?

Exercice 7 (3 points)

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x^2+y^2+z^2=1$. Posons $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}$ et $P = U\,{}^tU$.

N.B. : Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle transposée de A la matrice ${}^tA = (b_{i,j}) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A, c'est-à-dire, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$, $b_{i,j} = a_{j,i}$.
Par exemple, la matrice transposée de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Calculer ${}^tUU$ et en déduire que $P^2 = P$.
2. Montrer que $MP = 0$ et $PM = 0$.