Correction Partiel

Exercice 1

Soient $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$. On a $AU = V \iff U = A^{-1}V$.

Or $AU = V \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+y-z & = & X \\ -3x-3y+4z & = & Y \\ 3x+2y-3z & = & Z \end{array} \right.$. En faisant $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$, on obtient

$$AU = V \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+y-z & = & X \\ z & = & Y+3X \\ -y & = & Z-3X \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & X+Y+Z \\ y & = & 3X-Z \\ z & = & 3X+Y \end{array} \right.$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

On sait que $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$.

1. $\mathrm{Card}(\mathscr{B}_1) = 2 < \dim\big(\mathbb{R}_2[X]\big)$, donc $\mathscr{B}_1$ n'engendre pas $\mathbb{R}_2[X]$.
2. $\mathrm{Card}(\mathscr{B}_2) = 4 > \dim\big(\mathbb{R}_2[X]\big)$, donc $\mathscr{B}_2$ n'est pas une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$
3. Montrons que $\mathscr{B}_3$ est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha.1 + \beta(X+1) + \gamma(X^2+2X) = 0$. Alors, on a $\gamma X^2 + (\beta + 2\gamma)X + \alpha + \beta = 0$. Ainsi, $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille $\mathscr{B}_3$ est libre. Or $\mathrm{Card}(\mathscr{B}_3) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 3

Soient E, F deux $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. • $\mathrm{Ker}(f) \subset E$ et comme $f(0) = 0$, $0 \in \mathrm{Ker}(f)$, ainsi $\mathrm{Ker}(f) \neq \emptyset$. De plus, soient $(u, v) \in \big(\mathrm{Ker}(f)\big)^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a $f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v) = \alpha.0 + 0 = 0$. D'où, $\alpha u + v \in \mathrm{Ker}(f)$. On a prouvé que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sev de E donc un $\mathbb{R}$-ev.

   • $\mathrm{Im}(f) \subset F$ et comme $0 = f(0)$, $0 \in \mathrm{Im}(f)$, ainsi $\mathrm{Im}(f) \neq \emptyset$. De plus, soient $(u, v) \in \big(\mathrm{Im}(f)\big)^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. $\exists\, (u_1, v_1) \in E^2$ tel que $u = f(u_1)$ et $v = f(v_1)$. Ainsi, $\alpha u + v = \alpha f(u_1) + f(v_1) = f(\alpha u_1 + v_1)$ D'où, $\alpha u + v \in \mathrm{Im}(f)$. On a prouvé que $\mathrm{Im}(f)$ est un sev de F donc un $\mathbb{R}$-ev.
2. • Supposons f injective.

   Soit $u \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $f(u) = 0$ or $f(0) = 0$. On en déduit que $u = 0$. On a montré que $\mathrm{Ker}(f) \subset \{0\}$. L'inclusion inverse est immédiate.

   • Supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

   Soit $(u, v) \in E^2$ tel que $f(u) = f(v)$. Alors, $f(u - v) = 0$, c'est-à-dire, $u - v \in \mathrm{Ker}(f)$. Par conséquent, $u - v = 0$ i.e. $u = v$. Donc, f est injective.
3. $\mathrm{Im}(f) = F \iff \forall v \in F\ \exists u \in E$ tel que $v = f(u) \iff$ f est surjective.

Exercice 4

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x+y-z, x-y-3z) \end{array} \right.$.

1. Soient $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a $\alpha u + v = (\alpha x + x', \alpha y + y', \alpha z + z')$. Ainsi, $f(\alpha u + v) = \big((\alpha x + x') + (\alpha y + y') - (\alpha z + z'), (\alpha x + x') - (\alpha y + y') - 3(\alpha z + z')\big) = \alpha(x + y - z, x - y - 3z) + (x' + y' - z', x' - y' - 3z') = \alpha f(u) + f(v)$. Donc, f est linéaire.
2. $\mathrm{Ker}(f) = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0 \text{ et } x - y - 3z = 0\big\} = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 2z \text{ et } y = -z\big\} = \mathrm{Vect}\big((2, -1, 1)\big)$. Ainsi, $u = (2, -1, 1)$ engendre $\mathrm{Ker}(f)$. Or $u \neq 0$ donc c'est une famille libre. En conclusion, (u) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
3. Via le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Ker}(f) = 3 - 1 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$. Comme $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$, on en déduit que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

Exercice 5 (3 points)

1. On a $2(1, -1, 3) - 3(-1, -2, 1) - (5, 2, 3) = (0, 0, 0)$. Donc, le famille est liée.
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $af + bg + ch = 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ax + bx^2 + ce^{2x} = 0$.
   En prenant $x = 0$, on a $c = 0$. Puis, en prenant $x = 1$ et $x = -1$, on a $a + b = 0$ et $-a + b = 0$. D'où, $a = b = 0$. Donc, la famille est libre.
3. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $aA + bB = 0$. On a $a + 6b = 0$, $a - 2b = 0$, $-3a + b = 0$ et $4a + 4b = 0$. Ainsi, $a = b = 0$. La famille est donc libre.

Exercice 6 (4 points)

On note $\mathscr{B}_1 = (i, j)$et $\mathscr{B}_2 = \big((1, 1); (-1, 0)\big) = (e_1, e_2)$

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
2. $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
3. On a $id(e_1) = (1, 1) = i + j$ et $id(e_2) = (-1, 0) = -j$. D'où la matrice P.
4. On calcule facilement que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. De plus, on a $P^{-1}AP = D$.

Exercice 7 (3 points)

1. ${}^tUU = x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Ainsi $P^2 = (U\,{}^tU)(U\,{}^tU) = U({}^tUU){}^tU = U \times 1 \times {}^tU = U\,{}^tU = P$.
2. On a $P = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$. On vérifie matriciellement que $MP = PM = 0$.