EPITA

Mathématiques

Partiel (S2)

mai 2018

Nom :

Prénom :

Entourer le nom de votre professeur de TD : Mme Boudin / Mme Daadaa / M. Ghanem / M. Goron / Mme Trémoulet

Classe :

NOTE :

Exercice 1 (2 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice A^{-1} en prenant soin de vérifier (au brouillon) le résultat final.

Exercice 2 (4 points)

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $F(X) = \dfrac{X^2 + X - 1}{(X-1)(X-2)(X+2)}$

2. $G(X) = \dfrac{X^4 + X^3 + X^2 + 2X + 2}{(X-1)^2(X+1)}$

3. $H(X) = \dfrac{2X^2 - 1}{(X+1)(X^2+X+1)}$

Exercice 3 (2 points)

Soient E, F deux $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Montrer que f injective ssi $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.

Exercice 4 (3 points)

1. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ par $f\big(P(X)\big) = 2XP(X) - X^2P'(X)$.

   Déterminer la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Soit $f \in \mathscr{L}\big(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\big)$ définie par $f : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

   Déterminer la matrice de f relativement à la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 5 (2,5 points)

Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $u \in \mathscr{L}(E)$. On note $u^2 = u \circ u$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\} \iff \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$

Exercice 6 (2,5 points)

Dans les deux questions suivantes, vos réponses doivent être justifiées.

1. Les vecteurs $u = (1, 1, 0)$, $v = (4, 1, 4)$ et $w = (2, -1, 4)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

2. Soient $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $(f, g) \in E^2$ défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \\ g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$,
et $F = \text{Vect}(f, g)$. Quelle est la dimension de F ?

Exercice 7 (5 points)

Soient $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+2y \\ 3y \\ 2x-4y+2z \end{pmatrix} \end{array} \right.$ et A la matrice de f relativement à la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer A.

2. Soient $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ qui forme une base de $\mathbb{R}^3$.

   Déterminer la matrice de f relativement à $\mathscr{B}'$.

3. Soit $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(id)$ où id est l'application identité de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Déterminer P^{-1} puis $D = P^{-1}AP$. Que remarquez-vous ?

[suite du cadre page suivante]

4. Calculer D^2, D^3 et en déduire (sans récurrence) D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. En déduire (sans récurrence) A^n en fonction de P et D pour tout $n \in \mathbb{N}$.