

Corrigé du partiel 2

Exercice 1 (2 points)

Soient $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . On a

$$AU = V \iff U = A^{-1}V$$

Or

$$AU = V \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = X & (1) \\ -x - y + z = Y & (2) \\ 2x + 4y + 5z = Z & (3) \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = X \\ y + 4z = X + Y \\ -z = Z - 2X \end{cases}$$

(On a conservé (1), on a remplacé (2) par (2) + (1) et (3) par (3) - 2 · (1)). D'où

$$AU = V \iff \begin{cases} x = 9X - 2Y - 5Z \\ y = -7X + Y + 4Z \\ z = 2X - Z \end{cases}.$$

Finalement

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -5 \\ -7 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi, } A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -5 \\ -7 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (4 points)

$$1. F(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2} + \frac{c}{X+2}.$$

En multipliant cette égalité par $X - 1$ puis en prenant la valeur $X = 1$ on trouve $a = -1/3$.

En multipliant cette égalité par $X - 2$ puis en prenant la valeur $X = 2$ on trouve $b = 5/4$.

En multipliant cette égalité par $X + 2$ puis en prenant la valeur $X = -2$ on trouve $c = 1/12$.

Donc

$$F(X) = -\frac{1}{3(X-1)} + \frac{5}{4(X-2)} + \frac{1}{12(X+2)}$$

2. En effectuant la division euclidienne de $X^4 + X^3 + X^2 + 2X + 2$ par $(X - 1)^2(X + 1) = X^3 - X^2 - X + 1$ on a

$$X^4 + X^3 + X^2 + 2X + 2 = (X^3 - X^2 - X + 1)(X + 2) + 4X^2 + 3X$$

$$\text{donc } G(X) = X + 2 + \frac{4X^2 + 3X}{(X - 1)^2(X + 1)}.$$

$$\text{Or } R(X) = \frac{4X^2 + 3X}{(X - 1)^2(X + 1)} = \frac{a}{X + 1} + \frac{b}{X - 1} + \frac{c}{(X - 1)^2}.$$

En multipliant cette égalité par $X + 1$ et en prenant la valeur $X = -1$, on a $a = 1/4$.

En multipliant la même par $(X - 1)^2$ et en prenant la valeur $X = 1$, on a $c = 7/2$.

En prenant la valeur particulière 0, on obtient $b = 15/4$.

Ainsi

$$G(X) = X + 2 + \frac{1}{4(X+1)} + \frac{15}{4(X-1)} - \frac{7}{2(X-1)^2}$$

3. $H(X) = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2+X+1}$.

En multipliant cette égalité par $X+1$ et en prenant la valeur $X = -1$, on a $a = 1$.

Donc $H(X) = \frac{1}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2+X+1}$.

En prenant la valeur particulière 0, on a $-1 = 1 + c$ donc $c = -2$ d'où $H(X) = \frac{1}{X+1} + \frac{bX-2}{X^2+X+1}$.

Enfin en prenant la limite en $+\infty$ de $XH(X)$, on a $2 = 1 + b$ donc $b = 1$.

d'où $H(X) = \frac{1}{X+1} + \frac{X-2}{X^2+X+1}$.

Exercice 3 (2 points)

Supposons f injective et montrons que $\text{Ker}(f) = \{0\}$. L'inclusion $\{0\} \subset \text{Ker}(f)$ est immédiate. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0 = f(0)$. Or f injective donc $x = 0$.

Supposons $\text{Ker}(f) = \{0\}$ et montrons l'injectivité de f .

Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Alors, via la linéarité de f , $f(x - y) = 0$ donc $x - y \in \text{Ker}(f)$.

Or $\text{Ker}(f) = \{0\}$ donc $x - y = 0$ soit $x = y$ et f est donc injective.

Exercice 4 (3 points)

1. Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Alors $f(1) = 2X$; $f(X) = X^2$ et $f(X^2) = 0$ donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Soit $\mathcal{B} = \left(E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Alors $f(E_{11}) = E_{22}$; $f(E_{12}) = -E_{21}$; $f(E_{21}) = -E_{12}$ et $f(E_{22}) = E_{11}$ donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 (2,5 points)

\Rightarrow Supposons $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$ et montrons que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$.

L'inclusion $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$ est immédiate. Montrons que $\text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u)$.

Soit $x \in \text{Ker}(u^2)$. Alors $u^2(x) = u(u(x)) = 0$. Ainsi $u(x) \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u)$. Or $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$.

Ainsi $u(x) = 0$ et $x \in \text{Ker}(u)$.

\Leftarrow Supposons que $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$ et montrons que $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$.

L'inclusion $\{0\} \subset \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u)$ est évidente. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $x \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u)$. Alors $u(x) = 0$ et il existe $z \in E$ tel que $x = u(z)$.

Ainsi $0 = u(x) = u(u(z))$ donc $z \in \text{Ker}(u^2)$ or $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$ donc $z \in \text{Ker}(u)$ d'où $x = u(z) = 0$.

Exercice 6 (2,5 points)

1. $v - w = 2u$ donc les vecteurs u, v et w sont liés. Ainsi ils ne forment pas une base de \mathbb{R}^3 .

2. Montrons que les vecteurs f et g sont libres.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha f + \beta g = 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\alpha f(x) + \beta g(x) = 0$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\alpha \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \beta \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\alpha + \beta)e^x + (\alpha - \beta)e^{-x} = 0$.

En particulier, pour $x = 0$, on a immédiatement $\alpha = 0$.

Puis, pour $x = \ln(2)$, on a $2(\alpha + \beta) + \frac{\alpha - \beta}{2} = 0$ soit finalement, vu que $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Comme la famille (f, g) est libre et, par définition de F , engendre F , (f, g) forme une base de F .

Cette base contenant deux vecteurs, on en déduit que la dimension de F est 2.

Exercice 7 (5 points)

1. $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $f(u_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 3u_1$; $f(u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2u_2$ et $f(u_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = u_3$ donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(id) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Donc } D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f).$$

4. $D^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D^3 = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc, via une récurrence immédiate (non demandée), on peut en

déduire que $D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. $A = PDP^{-1}$ donc $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$.

On peut ainsi en déduire, via une récurrence immédiate (non demandée) que $A^n = PD^nP^{-1}$.