EPITA

Mathématiques

Partiel (S2)

juin 2017

Nom :

Prénom :

Nom de l'enseignant :

Classe :

NOTE :

Exercice 1 (2 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice A^{-1} en prenant soin de vérifier (au brouillon) le résultat final.

Exercice 2 (4,5 points)

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $F(X) = \dfrac{X^2+X+1}{(X+1)(X-1)(X-3)}$

2. $G(X) = \dfrac{X^3-X-1}{(X+1)(X+3)}$

3. $H(X) = \dfrac{X^2 - X - 1}{(X-2)(X^2+1)}$

Exercice 3 (3 points)

1. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ par $f\big(P(X)\big) = \big(P(1), P(2)\big)$.

   Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ (x,y,z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y & y+z \\ x+z & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$

   Déterminer la matrice de u relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 4 (3 points)

Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E)$. On note comme d'habitude $f^2 = f \circ f$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

3. Montrer que : $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\} \iff \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

[suite du cadre page suivante]

Exercice 5 (2 points)

On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$. Dans les trois questions suivantes, vos réponses doivent être justifiées.

1. $\mathscr{B}_1 = \{X^2 + X; X + 3\}$ engendre-t-elle $\mathbb{R}_2[X]$?

2. $\mathscr{B}_2 = \{2; X + 1; 2X^2; X^2 + 3\}$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$?

3. $\mathscr{B}_3 = \{1; X + 1; X^2 + 2X\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 6 (3 points)

Soient a et b deux réels, $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^2 puis J^k pour $k \geqslant 3$.

2. Exprimer A en fonction de I, J et J^2 où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. En déduire A^n pour tout entier naturel n non nul.

[suite du cadre page suivante]

Exercice 7 (4 points)

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto (x + y, 2x + y + z, x + t) \end{cases}$

1. Montrer que f est linéaire.

2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et donner sa dimension.

3. En déduire $\mathrm{Im}(f)$.