

EPITA  
Mathématiques

Partiel (S2)

juin 2017

Nom :

Prénom :

Nom de l'enseignant :

Classe :

NOTE :



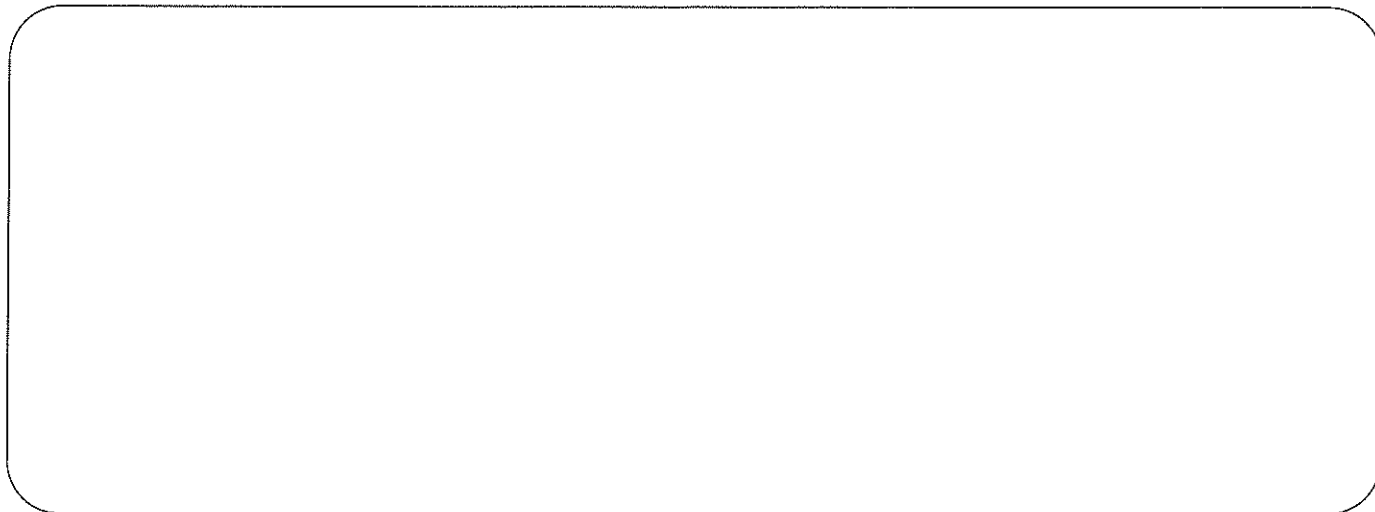
### Exercice 1 (2 points)

Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ . Déterminer la matrice  $A^{-1}$  en prenant soin de vérifier (au brouillon) le résultat final.

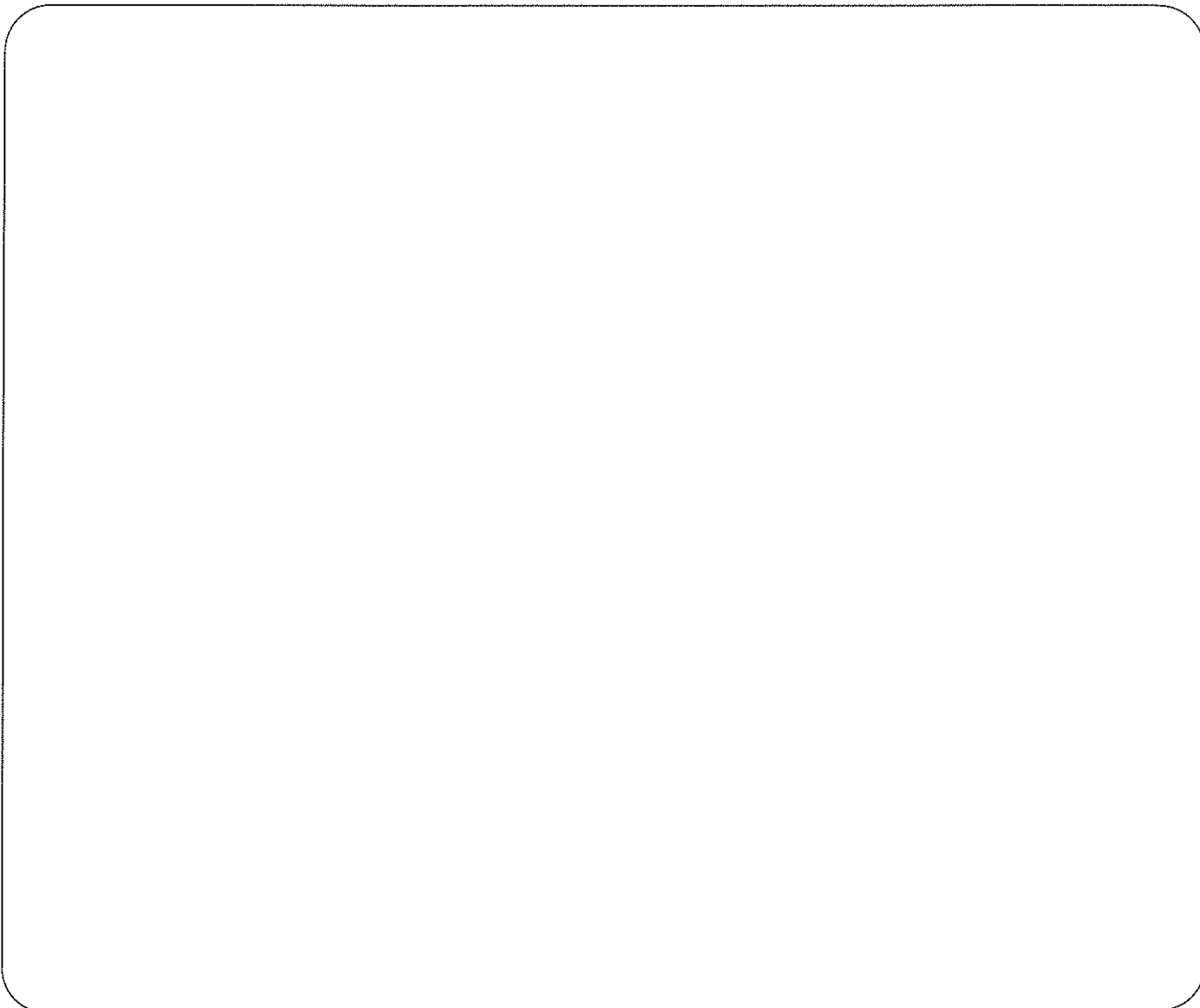
## Exercice 2 (4,5 points)

Décomposer en éléments simples dans  $\mathbb{R}(X)$  les fractions rationnelles suivantes :

1. 
$$F(X) = \frac{X^2 + X + 1}{(X + 1)(X - 1)(X - 3)}$$



2. 
$$G(X) = \frac{X^3 - X - 1}{(X + 1)(X + 3)}$$



3.  $H(X) = \frac{X^2 - X - 1}{(X - 2)(X^2 + 1)}$

### Exercice 3 (3 points)

1. Soit  $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie pour tout  $P \in \mathbb{R}_2[X]$  par  $f(P(X)) = (P(1), P(2))$ .

Déterminer la matrice de  $f$  relativement aux bases canoniques de  $\mathbb{R}_2[X]$  et  $\mathbb{R}^2$ .

2. Soit  $u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ (x, y, z) & \longmapsto \begin{pmatrix} x+y & y+z \\ x+z & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

Déterminer la matrice de  $u$  relativement aux bases canoniques de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

### Exercice 4 (3 points)

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On note comme d'habitude  $f^2 = f \circ f$ .

1. Montrer que  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ .

2. Montrer que  $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ .

3. Montrer que :  $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\} \iff \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ .

[suite du cadre page suivante]

### Exercice 5 (2 points)

On se place dans  $\mathbb{R}_2[X]$ . Dans les trois questions suivantes, vos réponses doivent être justifiées.

1.  $\mathcal{B}_1 = \{X^2 + X; X + 3\}$  engendre-t-elle  $\mathbb{R}_2[X]$  ?

2.  $\mathcal{B}_2 = \{2; X + 1; 2X^2; X^2 + 3\}$  est-elle une famille libre de  $\mathbb{R}_2[X]$  ?

3.  $\mathcal{B}_3 = \{1; X + 1; X^2 + 2X\}$  est-elle une base de  $\mathbb{R}_2[X]$  ?

### Exercice 6 (3 points)

Soient  $a$  et  $b$  deux réels,  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

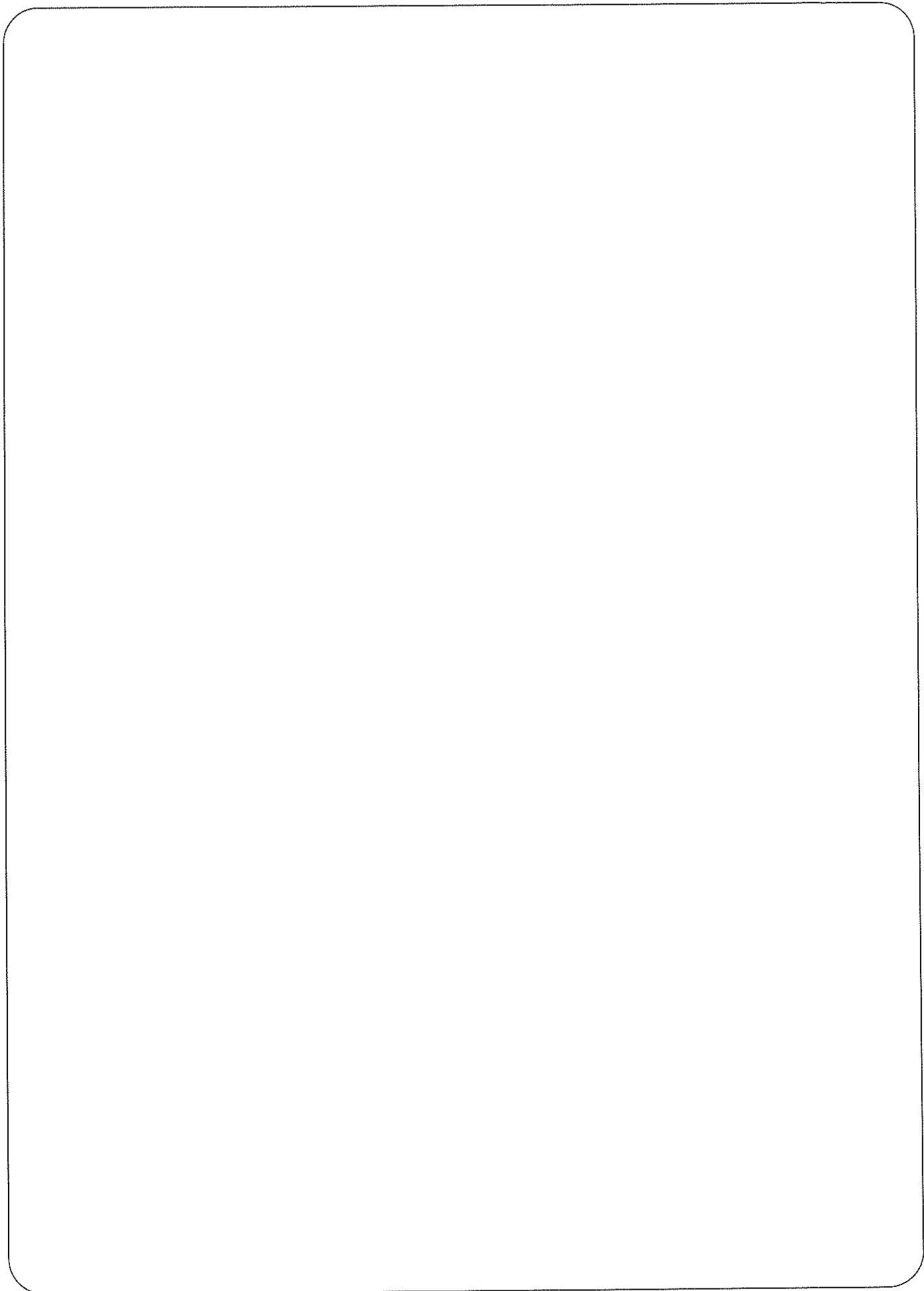
1. Calculer  $J^2$  puis  $J^k$  pour  $k \geq 3$ .

2. Exprimer  $A$  en fonction de  $I$ ,  $J$  et  $J^2$  où  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

3. En déduire  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$  non nul.

[suite du cadre page suivante]

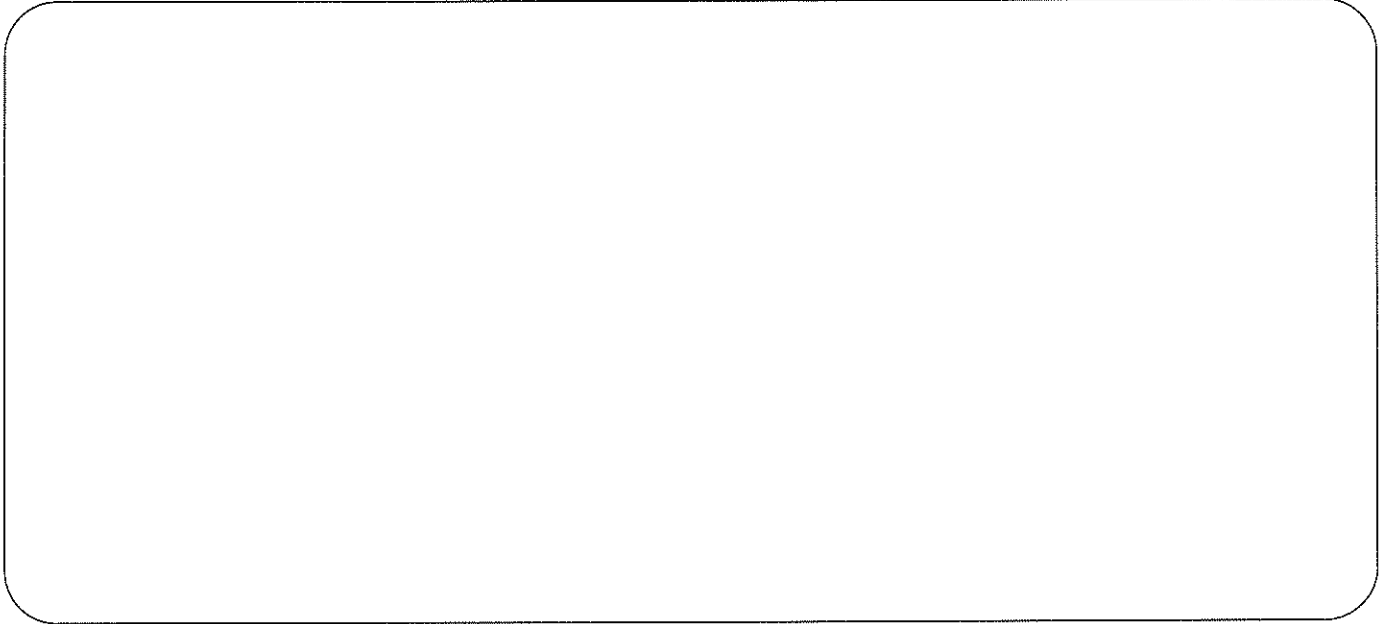




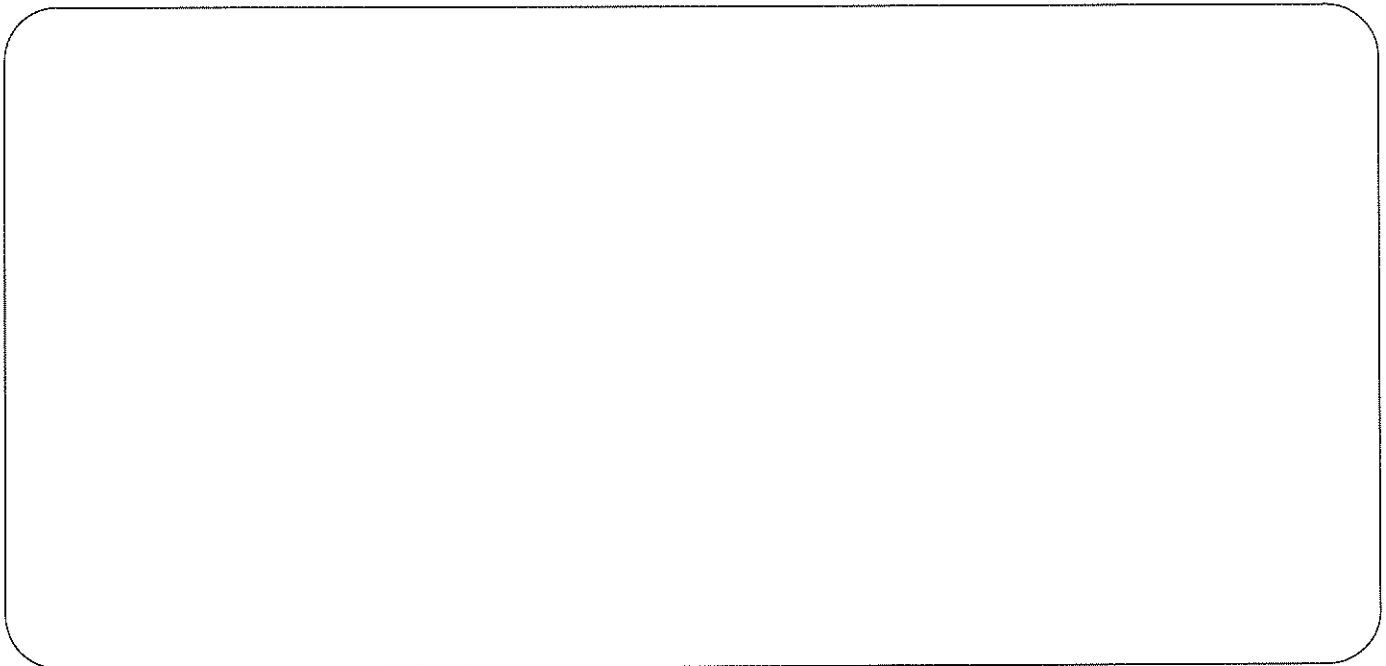
### Exercice 7 (4 points)

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \mapsto (x + y, 2x + y + z, x + t) \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est linéaire.



2. Déterminer  $\text{Ker}(f)$  et donner sa dimension.



3. En déduire  $\text{Im}(f)$ .

