Contrôle de cours ECUE ARITH (1 heure)

Nom : **Prénom :** **Classe :**

Le barème est sur 20. **Note :**

Cours 1 : divisibilité et division euclidienne (5 points)

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$.

1. Donner la définition mathématique de « a est un multiple de b »

   ....

2. Donner tous les entiers relatifs a tels que $a|6$.

   ....

3. Énoncer le théorème de la division euclidienne de $a \in \mathbb{Z}$ par -18.

   ....
   ....

4. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si oui, justifier par une preuve, si non, donner un contre-exemple.

   (a) « $a|b$ et $b|c \implies a|c$ »

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (b) « $a|bc \implies a|b$ ou $a|c$ »

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (c) « $\exists!\, n \in [\![0, 6]\!]$ tel que $7|a - n$ »

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (d) « $a|b$ et $b|a \implies a = b$ »

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Cours 2 : congruence (6,5 points)

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Donner la définition mathématique de $a \equiv b\,[n]$.

   ....

2. Ci-dessous, dans les expressions de la forme $a \equiv \ldots\ldots\,[\,n\,]$, compléter les pointillés par un entier $r \in [\![0, n-1]\!]$:

   a) $87 \equiv \ldots\ldots\,[\,5\,]$ **b)** $24 \equiv \ldots\ldots\,[\,7\,]$ **c)** $-15 \equiv \ldots\ldots\,[\,6\,]$ **d)** $-13 \equiv \ldots\ldots\,[\,11\,]$

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ tels que $a \equiv b\,[n]$ et $c \equiv d\,[n]$. Compléter les pointillés suivants par une expression avec b et/ou d :

   a) $-2a + 3c \equiv \ldots\ldots\ldots\ldots\,[n]$, **b)** $a \times c \equiv \ldots\ldots\ldots\ldots\,[n]$, **c)** $a^{13} \equiv \ldots\ldots\ldots\ldots\,[n]$

   Application : prenons $n = 6$. Compléter le tableau suivant par un entier $r \in [\![0, 5]\!]$:

a	-2	1	28
b	3	4	14
$a\,[6]$			
$b\,[6]$			
$a^3 - 2b\,[6]$			

4. Petit théorème de Fermat

   (a) Énoncer proprement le théorème ainsi que son corollaire.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (b) **Application** :

   i. En termes de congruence, que signifie $11 \mid 4^{13}$?

   ....

   ii. A-t-on $11 \mid 4^{13}$? Justifiez votre réponse en utilisant le petit théorème de Fermat.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Cours 3 : autour de Bézout (6,5 points)

1. Énoncer rigoureusement le théorème de Bézout d'une part pour deux entiers ayant un pgcd quelconque et d'autre part pour des entiers premiers entre eux.

....
....
....
....
....

2. Soit $(a, b, c, d, \alpha) \in (\mathbb{Z}^*)^5$ tel que $ac + bd = \alpha$. Dire si les affirmations suivantes sont vraies (V) ou fausses (F) :

   a) « Si $\alpha = 1$ alors a et b sont premiers entre eux » ...

   b) « Si $\alpha = 1$ alors a et d sont premiers entre eux » ...

   c) « Si $\alpha = 2$ alors $c \wedge d = 2$ » ...

3. Énoncer ET démontrer le lemme de Gauss.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Cours 4 : nombres premiers et pgcd (2 points)

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Rappeler ce que signifie que « p est un nombre premier ».

....
....

2. Décomposer $a = 300$ en produits de facteurs premiers.

....
....
....
....

3. Soit $b = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$. Donner $a \wedge b$.

....
....
....