23

16/20

Contrôle de cours 1 (1 heure)

Nom : Le Cras **Prénom :** Brieuc **Classe :** PA1

TB

N.B. : Le barème est sur 20.

1 Cours 1 : définitions et théorèmes à énoncer (5 points)

1. Soient $n \in \mathbb{N}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une propriété dépendant de n, définie pour $n \geq n_0$. Énoncer rigoureusement le théorème de récurrence dans ce cas là.

2

Soit la propriété $P(n)$ définit sur $[\![n_0, +\infty [\![$ et $n \geq n_0$ $n \in \mathbb{N}$

Si $P(n_0)$ est vraie et que $\forall n \geq n_0$ $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Alors $\forall n \geq n_0$ $P(n)$ est vraie

TB

2. Énoncer rigoureusement le théorème des gendarmes.

1

Soit 3 suites (U_n), (V_n) et (W_n)

telles que $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n \leq V_n \leq W_n$ et $l \in \mathbb{R}$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = l$

3. Soit (u_n) une suite. Donner la définition mathématique de : « (u_n) est majorée » (avec les quantificateurs).

0,5

La suite (U_n) est majorée si : $\exists m \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n \leq m$ ⚠

2 Cours 2 : exemple des suites géométriques (4 points)

Soient $q \in \mathbb{R}$ et la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = qu_n$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$ non nul.

1. Donner l'expression de u_n en fonction de n et de q.

1

$\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n = U_0 \times q^n$

2. (a) Supposons dans cette question que $q \neq 1$. Soient n et p deux entiers naturels tels que $p \leq n$. Donner la formule permettant de calculer $\sum\limits_{k=p}^{n} q^k$.

0,5

$\forall (n,p) \in \mathbb{N}_+$ $p \leq n$ $S_n = q^p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

(b) Application : calculer (en simplifiant le plus possible) $S = \sum\limits_{k=2}^{8} \frac{1}{2^k}$

1

$S_n = \frac{1}{2^2} \times \frac{1-\frac{1}{2^7}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{127}{128}\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{127}{512}}{\frac{1}{2}} = \frac{127}{512} \times 2 = \frac{254}{512} = \frac{127}{256}$

Bien

3. Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ en fonction de q.

0,5

Si $q > 1 \longrightarrow +\infty$

$q = 1 \longrightarrow 1$

$-1 < q < 1 \longrightarrow 0$

$q \leq -1 \longrightarrow$ pas de limite, diverge

3 Cours 3 : limites de suites (6 points)

3,5

1. On considère deux suites (u_n) et (v_n) ainsi que deux réels ℓ et ℓ'.
   Remplir le tableau suivant (soyez le plus précis possible sur le signe des « 0 » ou le signe des « ∞ ») :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell>0$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\ell<0$	0^-
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell'\neq 0$	$+\infty$	$\ell'<0$	$-\infty$	0^+	0^-	0^+
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$ ✓	0^+ ✓	$+\infty$ ✓	FI ✓	$+\infty$ ✓	$+\infty$ ✓	FI ✓

2. Calculer la limite en $+\infty$ de (u_n) dans les cas suivants. Rédiger proprement.

(a) $(u_n) : \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{-2n^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{e^{-n} - 3}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$\lim u_n \xrightarrow[+\infty]{} \dfrac{-2n^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{e^{-n} - 3}$

$\rightarrow$ $-2n^2 \rightarrow -\infty$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ $\Big)$ $-2n^2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow -\infty$, $e^{-n} - 3 \rightarrow -3$ $\Big)$ $+\infty$

1

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ✓

TB

(b) $(u_n) : \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{3 - 2n^2 + 6n^3}{n^2 + 1}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$

$\lim u_n \xrightarrow[+\infty]{} \dfrac{3 - 2n^2 + 6n^3}{n^2 + 1}$ $\rightarrow$ $3 - 2n^2 + 6n^3 \rightarrow +\infty$, $n^2 + 1 \rightarrow +\infty$ $\Big)$ FI : « $\frac{\infty}{\infty}$ »

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{6n^3\left(1 - \frac{1}{3n} + \frac{1}{2n^3}\right)}{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}$

$= \dfrac{6n\left(1 - \frac{1}{3n} + \frac{1}{2n^3}\right)}{1 + \frac{1}{n^2}}$

TB

1,5

$=$ $6n \rightarrow +\infty$, $1 - \frac{1}{3n} + \frac{1}{2n^3} \rightarrow 1$ $\Big)$ $6n\left(1 - \frac{1}{3n} + \frac{1}{2n^3}\right) \rightarrow +\infty$, $1 + \frac{1}{n^2} \longrightarrow 1$ $\Big)$ $+\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ✓

4 Cours 4 : comparaisons (3 points)

1. Soit la suite (u_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.
   La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifiez rigoureusement votre réponse.

$\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq U_n \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Soit (U_n) une suite quelconque et 0 et $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, 2 suites V_n et W_n

0,5

$\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$ $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 0$

~~Donc $V_n = W_n$~~ Non Donc $\lim\limits_{+\infty} V_n = \lim\limits_{+\infty} W_n$

D'après le théorème des gendarmes $V_n \leq U_n \leq W_n$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

2. Trouver proprement $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n - 2n^2$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n - 2n^2 = $ FI : "$\infty - \infty$"

Il faut faire apparaître la formule du th. en factorisant.

0

Insuffisant

D'après le théorème de croissance comparé $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n - 2n^2 = +\infty$

3. Soit (v_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^n - 2n^2 \leq v_n$.
   En partant du résultat de la question précédente, peut-on déterminer le comportement de (v_n) en $+\infty$? Si oui, lequel est-il ?

$\forall n \in \mathbb{N}$ $e^n - 2n^2 \leq V_n$

D'après le petit b, $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n - 2n^2 = +\infty$

1

D'après le théorème de comparaison si $U_n \leq V_n$ avec $U_n \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$

5 Cours 5 : convergence ou divergence (2 points)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Si elles sont vraies, citer le théorème mis en jeu en donnant son énoncé proprement, sinon donner un contre-exemple.

Soit (u_n) une suite.

1. Si (u_n) est décroissante et bornée alors elle converge.

1

Vrai, d'après le théorème de convergence monotone si une suite (U_n) est ~~strictement~~ décroissante et minoré alors elle converge

2. Si (u_n) est bornée alors elle converge.

1

Faux, $\lim (-1)^n \rightarrow$ diverge et est bornée par $-1 \leq (-1)^n \leq 1$