Contrôle de cours (1 heure)

Nom : **Prénom :** **Classe :**

N.B. :

— **Ce contrôle comporte deux parties distinctes associées aux ECUE ARITH et ASI. Temps approximatif : 45 minutes pour l'arithmétique et 15 minutes pour les suites. À vous de gérer votre temps.**

— **Il y aura deux notes distinctes. L'arithmétique est sur 20, les suites sur 10 mais la note sera multipliée par 2 pour donner une note sur 20**

Note ARITH : /20, **Note ASI** : /20

1 Contrôle de cours sur l'ECUE ARITH (durée : 45 minutes)

Cours 1 : divisibilité et division euclidienne (7 points)

1. Soit $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$. Donner la définition mathématique (avec les quantificateurs) de « c divise d »

   ....

2. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier par une preuve si oui, donner un contre-exemple si non.

   (a) « Si $a \mid b$ et $b \mid a$ alors $a = b$ »

   ....
   ....
   ....
   ....

   (b) « Si $a \mid b$ et $a \mid c$ alors $\forall (u,v) \in \mathbb{Z}^2$, $a \mid bu + cv$ »

   ....
   ....
   ....
   ....

   (c) « $a \mid b$ et $c \mid b \implies ac \mid b$ »

   ....
   ....
   ....
   ....

3. Soit $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

   (a) Énoncer le théorème de la division euclidienne de a par b.

   ....
   ....

   (b) On donne l'égalité $1034 = 148 \times 7 - 2$. Quels sont le quotient et le reste de la division euclidienne de 1034 par 7 ?

   ....
   ....
   ....

Cours 2 : autour de Bézout (5 points)

On admet que pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $\exists\,(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = a \wedge b$.

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que : $\exists\,(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1 \iff a \wedge b = 1$

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. A-t-on « $\exists\,(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 3 \iff a \wedge b = 3$ » ? Justifier.

   ....
   ....
   ....
   ....

Cours 3 : congruence (8 points)

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$. Justifier qu'il existe un unique $r \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $a \equiv r[n]$.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ tels que $a \equiv b\,[n]$ et $c \equiv d\,[n]$. Remplacer les pointillés par une réponse correcte (les réponses du type « $a \equiv a[n]$ » sont interdites)

   (i) $a \equiv b[n] \iff \cdots\cdots\cdots$ (ii) : $a + c \equiv \cdots\cdots\cdots [n]$, (iii) : $a \times c \equiv \cdots\cdots [n]$, (iv) : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $a^k \equiv \cdots\cdots [n]$.

3. **Application** : on prend $n = 11$, $a = 224$ et $c = 85$. **Vos réponses doivent être un entier entre 0 et 10.**

   (a) À quoi sont congrus a et c modulo 11 ? Détaillez un peu vos calculs !

   ....
   ....
   ....
   ....

   (b) En déduire $a + c$, $2a - c$, ac et a^3 modulo 11. Détaillez un peu vos calculs !

   ....
   ....
   ....
   ....

2 Contrôle de cours sur l'ECUE ASI (durée : 15 minutes)

Cours 1 : définitions (5 points)

Soit (u_n) une suite réelle définie sur $\mathbb{N}$.

1. (a) Donner la définition mathématique (avec des quantificateurs) de : « (u_n) est bornée ».

   ....

   (b) Donner un exemple d'une suite non constante et bornée.

   ....
   ....

2. (a) Donner la définition mathématique (avec des quantificateurs) de : « (u_n) est croissante ».

   ....

   (b) Que signifie que (u_n) est monotone ?

   ....

   (c) Donner un exemple d'une suite ni croissante, ni décroissante.

   ....
   ....

Cours 2 : convergence ou divergence (5 points)

Vos réponses doivent être justifiées.

1. La suite (u_n) où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos(n)$ est-elle convergente ? Si oui, donner sa limite.

   ....
   ....
   ....

2. La suite (v_n) où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln(n^2 + n)$ est-elle convergente ? Si oui, donner sa limite.

   ....
   ....
   ....

3. La suite (w_n) où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ est-elle convergente ? Si oui, donner sa limite.

   ....
   ....
   ....

4. La suite (x_n) où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ est-elle convergente ? Si oui, donner sa limite.

   ....
   ....
   ....

5. Donner un exemple d'une suite non constante convergente vers 2. Ne pas justifier.

   ....
   ....