Contrôle de cours - ECUE FCT (1 heure)

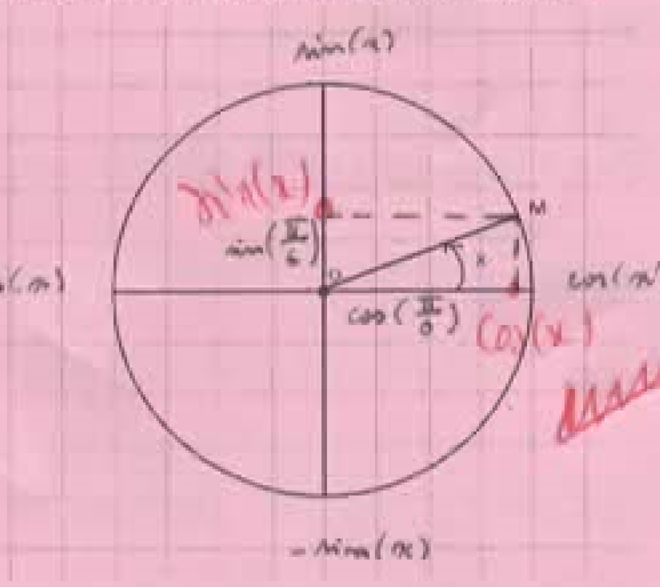
17/20

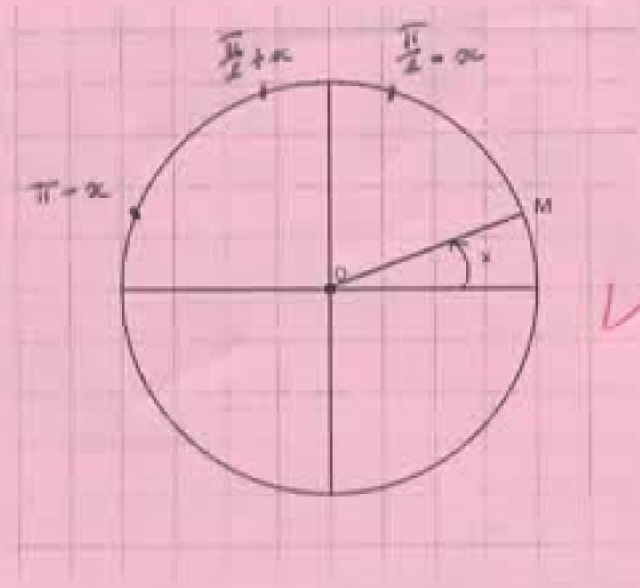
Nom : Le Cras **Prénom :** Brieuc **Classe :** PA1

N.B. : Le barème est sur 20.

1 Cours 1 : fonctions trigonométriques (8 points)

1. Manipulation du cercle trigonométrique





(a) Sur le dessin de gauche ci-dessus, indiquer graphiquement le cosinus et le sinus de x (faire apparaitre les traits de construction).

(b) Placer les angles $\pi - x$, $\frac{\pi}{2} + x$ et $\frac{\pi}{2} - x$ sur le dessin de droite. Donner $\cos(\pi - x)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$

$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$

1,5

(c) Remplir le tableau de valeurs suivant :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

1

(d) Calculer $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$, $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, $\sin(7\pi)$ et $\cos\left(\frac{17\pi}{3}\right)$.

$\cos(\frac{7\pi}{6}) = \cos(\frac{6\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) = \cos(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\cos(\frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(\frac{5\pi}{4}) = \sin(\frac{4\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = \sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin(7\pi) = \sin(6\pi + \pi) = \sin(\pi) = 0$

$\cos(\frac{17\pi}{3}) = \cos(\frac{18\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = \cos(6\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

2

2. La fonction tangente.
   (a) Rappeler le domaine de définition I de $f : x \longmapsto \tan(x)$ ainsi que son expression en fonction de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.

$f : x \to \tan(x)$ est π-périodique et $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ✓

1

Elle est donc définit sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ✓

   (b) Calculer la dérivée de f sur I. En trouver deux écritures distinctes. Vous détaillerez vos calculs en mettant en évidence les dérivées des fonctions mises en jeu.

On calcule la dérivé de tan : $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$\tan' = \frac{u}{v}$ $u(x) = \sin(x)$ $u'(x) = \cos(x)$
$\tan' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $v(x) = \cos(x)$ $v'(x) = -\sin(x)$

2

$\tan'(x) = \frac{\cos(x) \times \cos(x) - (\sin(x) \times (-\sin(x)))}{\cos^2(x)}$ TB

$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$

D'après Pythagore : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donc $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ ✓

$\tan'(x) = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ ✓

2 Cours 2 : dérivées de fonctions composées (2 points)

Sans se soucier du domaine de définition, trouver la dérivée de :

1. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$

$(x^2+1)' = 2x$
$\sqrt{X} = \frac{X'}{2\sqrt{X}}$
$e^X = X'e^X$

1

$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \times e^{\sqrt{x^2+1}}$

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \times e^{\sqrt{x^2+1}}$ ✓

2. $g(x) = \tan(x^2) + 1$

$x^2 = 2x$
$\tan(X) = \frac{X'}{\cos^2(X)}$

1

$g'(x) = 2x \times \frac{1}{\cos^2(x^2)}$ ✓

$g'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}$

3 Cours 3 : la fonction $x \longmapsto \ln(x)$ (10 points)

1. Donner l'allure de sa courbe représentative.

La fonction ln est strictement croissante. Elle coupe l'axe des abscisses en x = 1.
Elle est le symétrique de la fonction exponentielle par rapport à l'axe y = x. oui
La fonction ln diverge en +∞ quand x tend vers +∞ et diverge en −∞ quand x tend vers 0⁺ Il faut dessiner

1

2. Soient a et b deux réels strictement positifs et $n \in \mathbb{N}$. Remplacer les pointillés par une formule correcte quand cela est possible (évidemment une réponse du type « $y = y$ » est interdite !) :

a) $\forall x \in]0;+\infty[,\ e^{\ln(x)} = x$ b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$ c) $\ln(e) = 1$ d) $\ln(1) = 0$ e) $\ln(0) =$ impossible

f) $\ln(a+b) =$ pas de formule g) $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$ i) $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

j) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ k) $n\ln(a) = \ln(a^n)$

2

3. (a) Exprimer en fonction de $\ln(3)$, $A = e^{-2\ln(2)} + \ln(9e^2) - 4\ln(27)$.

$A = e^{-2\ln(2)} + \ln(9e^2) - 4\ln(27)$

$= e^{\ln(\frac{1}{4})} + 2\ln 3 + \ln(e^2) - 4\ln(3) - 8\ln(3)$

$= \frac{1}{4} + 2\ln 3 + 2 - 4\ln(3) - 8\ln(3) = \frac{9}{4} - 10\ln(3)$

$\frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$

0,5

(b) Résoudre l'inéquation $\ln(1-x) < 1$.

$\forall x \in]1;+\infty[$ $\ln(1-x) < 1$

$e^{\ln(1-x)} < e^1$ car $e^x \geq 0$

$0 < 1 - x < e$ Il faut s'assurer que $\ln(1-x)$ est défini

$1 - x - e < 0$

$1 - e < x$ $S =]1-e; \cancel{+\infty}\ 1[$

0,5

4. Donner la réponse aux limites suivantes (à la place des pointillés) :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ d) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0^-$

1

5. Soient $f : x \longmapsto \ln(x)$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x}$.

(a) Trouver l'expression de $f \circ g$ ainsi que son domaine de définition D_1 et sa dérivée.

$D_f :]0;+\infty[$ $D_g : [0;+\infty[$ donc $D_1 :]0;+\infty[$ $D_1' :]0;+\infty[$

$f(g(x)) = \ln(\sqrt{x})$ $f'(g(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}^2} = \frac{1}{2x}$

2

(b) Trouver l'expression de $g \circ f$ ainsi que son domaine de définition D_2 et sa dérivée.

$D_g : [0;+\infty[$ $D_f : \cancel{]0;+\infty[}$ donc $D_2 : \cancel{]0;+\infty[}$ $D_2' : \cancel{]0;+\infty[}$

$g(f(x)) = \sqrt{\ln(x)}$ $g'(f(x)) = \cancel{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{x}}}$

$\frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}$

0,5