

# Contrôle de cours 2 (1 heure)

Nom :

Prénom :

Classe :

N.B. : Le barème est sur 20.

## 1 Arithmétique

### Exercice 1 : divisibilité et division euclidienne (3,5 points)

1. (a) Soit  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ . Donner la définition mathématique de  $n \mid m$ .

.....

(b) Application : donner tous les diviseurs de 4 dans  $\mathbb{Z}$ .

.....

2. (a) Soit  $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ . Énoncer avec soin le théorème de la division euclidienne de  $n$  par  $m$ .

.....

.....

(b) On donne l'égalité :  $-358 = 21 \times (-18) + 20$ .

(i) Donner le quotient  $q_1$  et le reste  $r_1$  de la division euclidienne de  $-358$  par  $21$ . Justifier.

.....

.....

(ii) Donner le quotient  $q_2$  et le reste  $r_2$  de la division euclidienne de  $-358$  par  $-18$ . Justifier.

.....

.....

### Exercice 2 : congruence (5 points)

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ .

1. Donner la définition mathématique de  $a \equiv b [n]$

.....

2. Montrer que si  $a \equiv c [n]$  et  $b \equiv d [n]$  alors  $ab \equiv cd [n]$ .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Dans le même esprit que la question précédente, que dire de  $a + b$  et  $a^8$  modulo  $n$  dans la cas où  $a \equiv c[n]$  et  $b \equiv d[n]$ ?  
Ne pas justifier.

.....  
 .....

4.  $24^3 + 78$  est-il divisible par 7? Justifier.

.....  
 .....  
 .....  
 .....

**Exercice 3 : lemme de Gauss (3 points)**

Énoncer et démontrer le lemme de Gauss.

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

**Exercice 4 : pgcd (2,5 points)**

On se donne les deux entiers  $a = 2^3 \times 3 \times 21$  et  $b = 90$ .  
Les deux questions sont indépendantes.

1. Trouver  $a \wedge b$ . Donnez quelques explications sur votre calcul.

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

2. Trouver le reste de la division euclidienne de  $a^{22}$  par 23. Justifiez rigoureusement votre réponse.

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

## 2 Les suites

### Exercice 5 (6 points)

Soit  $(u_n)$  une suite.

1. Rappeler les définitions mathématiques (avec les quantificateurs) de :

(a)  $(u_n)$  est croissante : .....

(b)  $(u_n)$  est bornée : .....

2. Donner un exemple d'une suite (non constante) :

(a) divergente (justifier brièvement).

.....  
.....  
.....

(b) majorée par 3 (justifier brièvement).

.....  
.....  
.....

(c) strictement croissante et convergente (justifier proprement).

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

3. Soit  $q \in \mathbb{R}$ . Prenons  $(u_n) = (q^n)$ . Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $q$  pour que la suite  $(u_n)$  converge. Donner la limite dans ce cas là.

.....  
.....  
.....  
.....