Contrôle de cours 1 (1 heure)

Nom : **Prénom :** **Classe :**

N.B. : Le barème est sur 20.

1 Un peu de logique

Exercice 1 (3,5 points)

1. Soient P, Q et R trois assertions. Donner la négation de « $P \wedge Q$ », « $P \vee (Q \wedge R)$ » et de « $P \Longrightarrow Q$ »

   .....

   .....

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Mettre les symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$ ou $\Longleftrightarrow$ à la place des pointillés.

   1) $x < 1 \quad \cdots \quad x \leq 1$. 2) $x^2 + x - 6 > 0 \quad \cdots \quad x > 2$. 3) $\ln(x) = 3 \quad \cdots \quad x = e^3$. 4) x multiple de 3 $\quad \cdots \quad$ x multiple de 6.

2 Ensembles et fonctions

Exercice 2 (6 points)

Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$.

1. Donner la définition mathématique (avec les quantificateurs) de « f est injective »

   .....

   .....

2. Donner la définition mathématique (avec les quantificateurs) de « f est surjective »

   .....

   .....

3. Prenons le cas $E = F = [\![1, 5]\!]$.

   (a) Dessiner (graphe, patates...) une fonction $f : E \longrightarrow F$ vérifiant $f(\{1, 2, 5\}) = \{1, 4\}$. Votre fonction f est-elle injective ? surjective ? Justifiez.

   .....

   .....

   .....

   .....

   .....

   .....

   .....

   .....

   .....

   .....

   .....

   .....

   .....

   .....

(b) Dessiner (graphe, patates...) une fonction $f : E \longrightarrow F$ bijective telle que $f^{-1}(\{3,5\}) = \{3,4\}$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

3 Intégration

Exercice 3 (4,5 points)

1. Sans intégration par parties ni changement de variable, calculer $I = \displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

2. Énoncer proprement le théorème d'intégration par parties sans oublier ses hypothèses.

.....
.....
.....
.....

3. Démontrer soigneusement la formule d'intégration par parties.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

4 Dénombrement

Exercice 4 (2,5 points)

On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e\}$.

Compléter la fin des phrases suivantes :

1. Le nombre de 5-uplets de E sans répétition est $\cdots\ \cdots$
2. Le nombre de 3-uplets de E avec répétition est $\cdots\ \cdots$
3. Le nombre de 4-uplets de E sans répétition et commençant par a est $\cdots\ \cdots$
4. Le nombre de sous-ensembles de E est $\cdots\ \cdots$
5. Le nombre de sous-ensembles à 3 éléments de E est $\cdots\ \cdots$

Exercice 5 (3,5 points)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

1. Rappeler l'expression de $\binom{n}{k}$ et rappeler ce que compte cette quantité.

   .....
   .....
   .....
   .....

2. Considérons un ensemble E de cardinal n.

   Expliquer (d'un point de vue dénombrement) pourquoi il y a autant de sous-ensembles de E à k éléments que de sous-ensembles de E à $n - k$ éléments. Démontrer ensuite cette affirmation par le calcul.

   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....