Contrôle TD 2 (45 minutes)

Nom : **Prénom :** **Classe :**

N.B. : Le barème est sur 10. La note sera ramenée à une note sur 20.

Questions de cours (3 points)

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

1. Énoncer avec soin le théorème de la division euclidienne de a par b.

$\exists! \, (q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tq $a = bq + r$ et $0 \leq r < |b|$

2. On donne l'égalité : $1208 = 23 \times 51 + 35$.

(a) Donner le quotient et le reste de la division euclidienne de 1208 par 23 en justifiant votre réponse.

On a $1208 = 23 \times 51 + 35 = 23 \times 51 + 23 + 12 = 23 \times 52 + 12$
Comme $0 \leq 12 < 23$, $q = 52$ et $r = 12$.

(b) Donner le quotient et le reste de la division euclidienne de -1208 par 51 en justifiant votre réponse.

On a $-1208 = -23 \times 51 - 35 = 51 \times (-23) - 51 + 51 - 35$.
$= 51 \times (-24) + 16$. Comme $0 \leq 16 < 51$, $q = -24$ et $r = 16$

Exercice 1 (2,5 points)

En utilisant obligatoirement le petit théorème de Fermat que vous énoncerez avec soin, trouver le reste de la division euclidien de $n = 39^{129}$ par 7.

Fermat 1) Soient p premier et $n \in \mathbb{N}$.
$n^p \equiv n \, [p]$
2) Soient p premier, $n \in \mathbb{N}$. Si $p \nmid n$ alors $n^{p-1} \equiv 1 \, [p]$

. On a $39 \equiv 4 \, [7]$ d'où $39^{129} \equiv 4^{129} \, [7]$.
. 7 est premier et $7 \nmid 4$ d'où $4^6 \equiv 1 \, [7]$
Comme $129 = 6 \times 21 + 3$, $4^{129} = (4^6)^{21} \times 4^3 \equiv 1^{21} \times 4^3 \, [7]$.
cad $4^{129} \equiv 4^3 \, [7]$. Or $4^2 = 16 \equiv 2 \, [7]$ d'où
$4^3 \equiv 4 \times 2 \, [7] \equiv 1 \, [7]$. Ainsi $39^{129} \equiv 4^{129} \, [7]$
$\equiv 1 \, [7]$.

Comme $0 \leq 1 < 7$, 1 est le reste de 39^{129} par 7

Exercice 2 (3 points)

On considère $a = 2 \times 3^2 \times 5 \times 6$ et $b = 2^4 \times 3^3 \times 7$.

1. Trouver $a \wedge b$ le pgcd de a et de b.

$a = 2^2 \times 3^3 \times 5^1 \times 7^0$ et $b = 2^4 \times 3^3 \times 5^0 \times 7^1$.
D'où $a \wedge b = 2^2 \times 3^3 \times 5^0 \times 7^0 = 108$

2. Écrire sous forme de facteurs premiers la forme générale d'un diviseur commun (et positif) de a et de b. En déduire le nombre de diviseurs communs (positifs) de a et de b. Expliquer brièvement.

Soit d un diviseur commun de a et de b
On a $d = 2^i \times 3^j$ avec $i \in [\![0,2]\!]$ et $j \in [\![0,3]\!]$
On a alors 3 possibilités pour les puissances de 2 et 4 pour les puissances de 3.
Donc au total on a $3 \times 4 = 12$ diviseurs possibles

3. Soit $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $77 \mid ac$. Montrer avec soin que $77 \mid c$.

Supposons $77 \mid ac$
$77 = 7 \times 11$ $a = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$ d'où $77 \wedge a = 2^0 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0 \times$
cad $77 \wedge a = 1$
D'où, par Gauss $77 \mid c$

Exercice 3 (1,5 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la fraction $\dfrac{n}{2n+1}$ est irréductible.

Montrer que la fraction est irréductible revient à montrer que $(2n+1) \wedge n = 1$
Or $(2n+1) \times 1 + n \times (-2) = 1$
Par le thm de Bézout, on a donc bien que $(2n+1)$ et n sont premiers entre eux.