Contrôle TD 1 (45 minutes)

(CORRECTION NON OFFICIELLE)

Nom : Prénom : Classe :

N.B. : Le barème est sur 10. La note sera ramenée à une note sur 20.

Questions de cours (3 points)

Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$

Rappeler la définition mathématique (avec les quantificateurs) de

1. f est injective.

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

2. f est surjective.

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$$

Application : La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^2 - 1 \end{cases}$ est-elle injective ? surjective ? Justifiez vos réponses.

- $f(-2) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$ et $f(2) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$
  Or $-2 \neq 2$ et $f(-2) = f(2)$
  donc la fonction f n'est pas injective
- La fonction f n'atteind pas la valeur -3, Or $-3 \in \mathbb{R}$
  donc la fonction f n'est pas surjective

Exercice 1 (3 points)

On considère l'assertion P : « $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 - 3x + 2 \leq 0 \implies (x \leq 1 \lor x \geq 2))$ »

1. Cette assertion est-elle vraie ou fausse ? Justifiez votre réponse.

$x^2 - 3x + 2$ est un polynôme du second degré,
donc $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1^2$

$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$

On a le tableau de signe :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi,
$x^2 - 3x + 2 \leq 0 \Rightarrow x \in [1, 2]$

Or, $(x \leq 1 \lor x \geq 2) \Leftrightarrow x \in]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$

Or $[1, 2] \not\subset]-\infty; 1] \cup [2; +\infty[$

donc l'assertion est fausse.

2. Donner la négation de P.

$$\neg P : \text{“} \exists x \in \mathbb{R}, (x^2 - 3x + 2 \leq 0) \land (x > 1 \land x < 2)$$

3. Donner la contraposée de P.

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x > 1 \land x < 2) \Rightarrow (x^2 - 3x + 2 > 0)$$

Exercice 2 (2,5 points)

En intégrant par parties, calculer $I = \int_0 x\sin(3x)\,dx$. Vous ferez clairement apparaître les fonctions mises en jeu ainsi que leurs dérivées et/ou primitives.

Soit $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx$$

On pose

$u(x) = x$ donc $u'(x) = 1$

$v'(x) = \sin(3x)$ donc $v(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x)$

$$I = \int_0^{\pi/6} x\sin(3x)\,dx$$

$$= \left[x\left(-\frac{1}{3}\cos(3x)\right)\right]_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6} -\frac{1}{3}\cos(3x)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x\cos(3x)\right]_0^{\pi/6} + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\sin(3x)\right]_0^{\pi/6}$$

$$= -\frac{\pi}{3\times 6}\times\cos(\pi/2) - 0 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\sin(\pi/2) - \frac{1}{3}\sin(0)\right)$$

$$= 0 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 0\right) \boxed{= \frac{1}{9}}$$

Exercice 3 (1,5 points)

On considère l'ensemble E des nombres à trois chiffres choisis dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, chaque chiffre pouvant être répété.

1. Quel est le cardinal de E ?

On a une répétition,
donc $Card(E) = 5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$

2. Quel est le nombre d'éléments de E dans lesquels le chiffre 1 apparait au moins une fois ?

Sachant que l'événement contraire est de ne pas avoir de chiffre 1,
On passe par l'événement contraire.

$5^3 - 4\times4\times4 = 5^3 - 4^3 = 61$

3. Quel est le nombre d'éléments de E commençant par le chiffre 1, ce chiffre n'étant pas réutilisé par la suite ?

$1 \times 4 \times 4 = 4^2 = 16$