EPITA / S1 Corrigé Année: 2020/2021

NOM : .... PRENOM :.. GROUPE :........

Contrôle 1 de Physique

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.

Réponses exclusivement sur le sujet

QCM (4 points-pas de points négatifs)

0,5 par question

Entourer la bonne réponse

1- Le vecteur vitesse en coordonnées polaires s'écrit :

a) $\vec{V} = \rho\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

b) $\vec{V} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

c) $\vec{V} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$

2- Le vecteur unitaire $\vec{u}_\rho$ des coordonnées polaires vérifie :

a) $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ c) $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\rho$

b) $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \vec{0}$ d) $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$

3- Le vecteur accélération en coordonnées polaires est donné par :

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho(\dot{\theta})^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, de rayon R, le vecteur accélération s'écrit :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ R\ddot{\theta} \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta}}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} R(\dot{\theta})^2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta}}$ c) $\begin{pmatrix} -R(\dot{\theta})^2 \\ R\ddot{\theta} \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta}}$ d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -R(\dot{\theta})^2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta}}$

4- Un point est mobile dans le plan (x,y) à partir de la date t = 1s. Ses équations horaires sont :

$x(t) = \ln(t)$ et $y(t) = t + \frac{1}{t}$.

Le vecteur vitesse de ce mouvement en coordonnées cartésiennes est :

a) $\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ 1 + \frac{1}{t^2} \end{pmatrix}$ b) $\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ 1 - \frac{1}{t^2} \end{pmatrix}$ c) $\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \frac{1}{t^2} \end{pmatrix}$

5- Dans la base de Frenet le vecteur vitesse s'exprime par :

a) $\vec{v} = \frac{ds}{dt}\overrightarrow{u_T}$ b) $\vec{v} = R.\ddot{\theta}\overrightarrow{u_T}$ c) $\vec{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_N}$

6- Dans la base de Frenet, l'expression de l'abscisse curviligne s(t) est donnée par

a) $s(t) = \int_0^t a_T.dt + s(t=0)$ b) $s(t) = \int_0^t v.dt + s(t=0)$ c) $s(t) = \int_0^t a_N.dt + s(t=0)$

A. Zellagui

7- Le vecteur vitesse d'un mouvement d'équations horaires : $\begin{cases} x(t) = -2t^3 - t \\ y(t) = 4t^2 \end{cases}$ est :

a) $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x(t) = -6t - 1 \\ V_y(t) = 8t \end{pmatrix}$ b) $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x(t) = -6t^2 - 1 \\ V_y(t) = 8t \end{pmatrix}$ c) $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x(t) = -2t^2 - 1 \\ V_y(t) = 8t \end{pmatrix}$

8- On considère un mouvement dans le plan (X,Y), dont les équations horaires sont données par :

$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\sin(\omega t) \end{cases}$; Où R et ω sont des constantes positives.

L'équation de la trajectoire de ce mouvement s'écrit :

a) $x^2 + y^2 = R$ b) $x^2 + y^2 = (R\omega)^2$ c) $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1$ d) $x^2 - y^2 = R^2$

Exercice 1 (5 points)

Une particule est en mouvement dans le plan (X,Y) dont les équations horaires, en coordonnées cartésiennes, sont données par :

$\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos(\omega t) \\ y(t) = 2\sqrt{2}\sin(\omega t) \end{cases}$ (ω est une constante positive exprimé en rad.s^{-1}).

1- a) Montrer que l'équation de la trajectoire de ce mouvement est de la forme : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, équation d'une trajectoire elliptique, avec a et b des constantes positives.

b) Préciser les valeurs des constantes a et b.

a) $\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos(\omega t) \; (1) \\ y(t) = 2\sqrt{2}\sin(\omega t) \; (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{2}} = \cos(\omega t) \; (3) \\ \frac{y}{2\sqrt{2}} = \sin(\omega t) \; (4) \end{cases}$

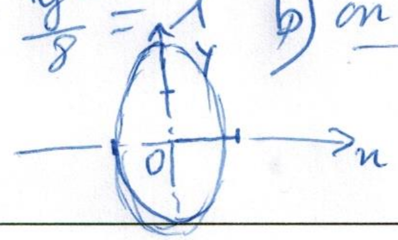
1

$(3)^2 + (4)^2 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$ b) on identifie : $a = \sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2}$

si a>b

0,5



2- Exprimer les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}(t)$. Donner sa norme.

0,5 $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = (-\sqrt{2}\omega\sin(\omega t))\vec{u}_x + (2\sqrt{2}\omega\cos(\omega t))\vec{u}_y$

norme : $v(t) = \sqrt{2\omega^2\sin^2(\omega t) + 8\omega^2\cos^2(\omega t)}$

$= \sqrt{2}\omega . \sqrt{\sin^2(\omega t) + 4\cos^2(\omega t)}$

1

$= \sqrt{2}\omega\sqrt{\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) + 3\cos^2(\omega t)} = \sqrt{2}\omega\sqrt{1 + 3\cos^2(\omega t)}$

3- a) Exprimer les composantes du vecteur accélération $\vec{a}(t)$. Donner sa norme.

b) Exprimer le vecteur accélération $\vec{a}(t)$ en fonction du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$.

a) $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-\sqrt{2}\omega^2 \cos(\omega t)\right)\vec{u}_x + \left(-2\sqrt{2}\,\omega^2 \sin(\omega t)\right)\vec{u}_y$

0,5

norme : $a = \sqrt{2\omega^4\cos^2(\omega t) + 8\omega^4 \sin^2(\omega t)}$

$= \sqrt{2}\omega^2 . \sqrt{\cos^2(\omega t) + 4\sin^2(\omega t)}$

1

$= \sqrt{2}\omega^2 . \sqrt{\underbrace{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)}_{1=} + 3\sin^2(\omega t)}$

$a(t) = \sqrt{2}\omega^2 . \sqrt{1 + 3\sin^2(\omega t)}$

b) $\vec{a} = \left(-\sqrt{2}\,\omega^2\cos(\omega t)\right)\vec{u}_x + \left(-2\sqrt{2}\omega^2 \sin(\omega t)\right)\vec{u}_y$

0,5

$= \left(-\omega^2 x(t)\right)\vec{u}_x + \left(-\omega^2 y(t)\right)\vec{u}_x$.

$\vec{a}(t) = -\omega^2\left(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y\right) = -\omega^2 . \overrightarrow{OM}(t)$

Exercice 2 (5 points)

On considère un mouvement dans le plan (X,Y), dont les équations horaires sont :

$\begin{cases} x(t) = sin^2(\omega t) \\ y(t) = 1 + cos(2\omega t) \end{cases}$; (ω est une constante positive).

1- a) Retrouver l'équation de la trajectoire. Préciser sa nature. On donne : $cos(2\omega t) = 1 - 2sin^2(\omega t)$.

$\begin{cases} x(t) = \sin^2(\omega t) \ (1) \\ y(t) = 1 + \cos(2\omega t) \ (2) \end{cases}$

2

(2) $\Rightarrow y(t) = 1 + 1 - 2\sin^2(\omega t) = 2 - 2\sin^2(\omega t)$

or $x(t) = \sin^2(\omega t) \Rightarrow \boxed{y(x) = 2 - 2x}$

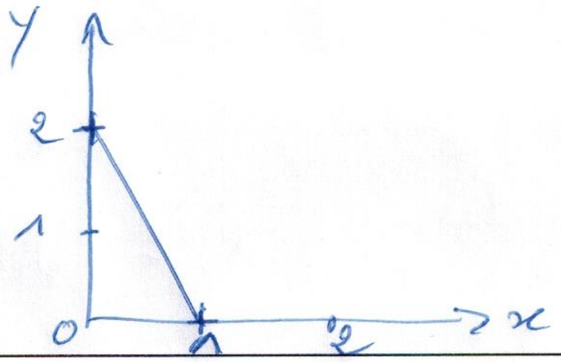
la trajectoire est une droite.

b) Tracer cette trajectoire, sachant que : $0 \leq sin^2(\omega t) \leq 1$.

on trouve $y(x) = 2 - 2x$.

$$\begin{cases} x=0 & y=2 \\ x=1 & y=0 \end{cases}$$

(1)



2- Exprimer les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes. Donner sa norme.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \begin{pmatrix} 2w\sin(wt)\cos(wt) \\ -2w\sin(wt)\cos(wt) \end{pmatrix}_{(\vec{u}_x, \vec{u}_y)}$$

(1)

Norme :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$= \sqrt{4w^2\sin^2(wt)\cos^2(wt) + 4w^2\sin^2(wt)\cos^2(wt)}$$

(1) $$= \sqrt{8w^2\sin^2(wt)\cos^2(wt)}$$

$$= 2\sqrt{2}w\sqrt{\sin^2(wt)\cos^2(wt)}$$

$$= 2\sqrt{2}w\,|\sin(wt)\cdot\cos(wt)|$$

$$v = \sqrt{2}w\cdot|\sin(2wt)|$$

Exercice 3 ***Base cylindrique, base de Frenet*** (6 points)

On considère un mouvement hélicoïdal, représentant une combinaison d'un mouvement circulaire de rayon R dans le plan (X,Y) et d'un mouvement de translation sur l'axe (OZ).
Le vecteur position en coordonnées cylindriques de ce mouvement est donné par :
$\overrightarrow{OM}(t) = R\vec{u}_\rho + Kt\vec{u}_z$; sachant que R et K sont des constantes positives.
On donne : $\theta(t) = \omega t$ (ω est une constante positive).

1- a) Exprimer le vecteur vitesse $\vec{V}$, en coordonnées cylindriques. Exprimer sa norme.

vecteur : $\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\vec{u_\rho}) + \frac{d}{dt}(K.t\vec{u_z})$

$= R.\dot{\vec{u_\rho}} + K\vec{u_z}$ (car $\dot{\vec{u_z}} = \vec{0}$).

$\vec{V} = R.\dot{\theta}\vec{u_\theta} + K\vec{u_z} = R\omega\vec{u_\theta} + K\vec{u_z}$ 1

car $\theta(t) = \omega t \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \omega$.

Norme : $V = \sqrt{R^2\omega^2 + K^2}$ (norme cste) 0,5

b) En déduire l'abscisse curviligne s(t), sachant que : $V = \frac{ds}{dt}$ et $s(t_0 = 0) = 0$.

$V = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = V dt$.

1,5 $\int_0^s ds = \int_0^t V dt \Rightarrow s(t) = \int_0^t v dt + \underbrace{s_0}_{0}$

$\boxed{s(t) = \int_0^t \left(\sqrt{R^2\omega^2 + K^2}\right) dt = \left(\sqrt{R^2\omega^2 + K^2}\right) t} = \text{cste} \times t.$

2- a) Exprimer le vecteur accélération $\vec{a}$, en coordonnées cylindriques. Exprimer sa norme.

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(R\omega\vec{u_\theta} + K\vec{u_z}\right)$

1 $\vec{a}_{cyl} = R\omega\dot{\vec{u_\theta}} = R\omega(-\dot{\theta}\vec{u_\rho}) = -R\omega^2\vec{u_\rho}$.
$(\dot{\theta} = \omega)$.

Norme : $\boxed{a_{cyl} = |-R\omega^2| = R\omega^2}$

b) Exprimer les composantes du vecteur accélération, tangentielle a_T et normale a_N dans la base de Frenet. La composante a_N doit être exprimée en fonction du rayon de courbure Rc.

on a la norme de $\vec{v}$: 0,5

$$V = \sqrt{R^2 w^2 + K^2} \Rightarrow a_T = \frac{dV}{dt} = 0$$

(accél tang)

$$a_N = \frac{V^2}{R_c} = \frac{R^2 w^2 + K^2}{R_c}$$ 0,5.

(accél normale)

d'où $a_{Frenet} = a_N$

c) En déduire le rayon de courbure de la trajectoire Rc, en fonction de R, K et ω, en utilisant l'égalité entre la norme du vecteur accélération dans la base cylindrique et celle exprimée dans la base de Frenet. Sachant que la norme d'un vecteur ne dépend pas de la base.

c) $a_F = a_{cyl}$ (égalité des normes $\forall$ la base)

$\Rightarrow a_N = a_{cyl}$ car $a_T = 0$.

1 $$\frac{V^2}{R_c} = \frac{R^2 w^2 + K^2}{R_c} = R w^2.$$

d'où $$\boxed{R_c = \frac{R^2 w^2 + K^2}{R w^2}}$$

Rq : on retrouve qd $K = 0$ (rotation ds le plan (x, y) seulement

alors $R_c = R$ = rayon du cercle