EPITA / S1 Corrigé + barème. Année: 2019/2020

NOM : .... PRENOM :.. GROUPE :........

Contrôle 1 de Physique

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.

Réponses exclusivement sur le sujet

QCM (Sans points négatifs) 4 points

Entourer la bonne réponse

1- Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls, colinéaires et de sens opposés est

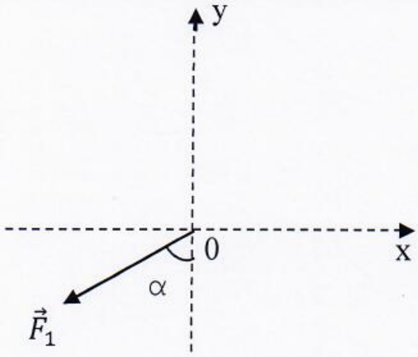
a) strictement positif

b) nul

c) strictement négatif

0,5

2- Les composantes du vecteur force $\vec{F}_1$ représenté sur le schéma ci-dessous sont :



0,5

a) $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -F_1\cos(\alpha) \\ F_1\sin(\alpha) \end{pmatrix}$ b) $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -F_1\sin(\alpha) \\ -F_1\cos(\alpha) \end{pmatrix}$ c) $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -F_1\sin(\alpha) \\ F_1\cos(\alpha) \end{pmatrix}$

3- La norme du vecteur $\vec{V}_3 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$, tel que : $(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \alpha$ est

a) $V_3 = V_1.V_2.|sin(\alpha)|$

b) $V_3 = V_1.V_2.|cos(\alpha)|$

c) $V_3 = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1.V_2.cos(\alpha)}$

0,5

4- La dérivée par rapport à la variable t de la fonction $f(t) = Acos^2(\theta(t))$, A étant une constante, s'écrit

a) $\frac{df(t)}{dt} = 2A\dot{\theta}(t)cos(\theta(t))\sin(\theta(t))$

b) $\frac{df(t)}{dt} = -2A\dot{\theta}(t)cos(\theta(t))\sin(\theta(t))$

c) $\frac{df(t)}{dt} = 2Acos(\theta(t))\sin(\theta(t))$

0,5

5- Le vecteur vitesse en coordonnées cylindriques s'écrit :

a) $\vec{V} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

b) $\vec{V} = \rho\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$

c) $\vec{V} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$

0,5

A. Zellagui

6- Le vecteur accélération en coordonnées polaires est donné par :

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho(\dot{\theta})^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

0,5

Dans le cas d'un mouvement circulaire décéléré, de rayon R, le vecteur accélération s'écrit

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ R\ddot{\theta} \end{pmatrix}_{\vec{u_\rho},\vec{u_\theta}}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} R(\dot{\theta})^2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{u_\rho},\vec{u_\theta}}$ c) $\begin{pmatrix} -R(\dot{\theta})^2 \\ R\ddot{\theta} \end{pmatrix}_{\vec{u_\rho},\vec{u_\theta}}$ d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -R(\dot{\theta})^2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{u_\rho},\vec{u_\theta}}$

7- Le vecteur unitaire $\vec{u}_\rho$ des coordonnées polaires vérifie :

0,5

a) $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ c) $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\rho$

b) $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \vec{0}$ d) $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$

8- Les équations horaires d'un mouvement en coordonnées polaires sont :

$\begin{cases} \rho(t) = \rho_0 e^{\omega t} \\ \theta(t) = \omega t \end{cases}$; ρ_0, ω sont des constantes positives.

Les équations horaires en coordonnées cartésiennes de ce mouvement s'écrivent :

0,5

a) $\begin{cases} x(t) = \rho_0 \sin(\omega t) \\ y(t) = \rho_0 \cos(\omega t) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x(t) = \rho_0 e^{\omega t}\cos(\omega t) \\ y(t) = \rho_0 e^{\omega t}\sin(\omega t) \end{cases}$ c) $\begin{cases} x(t) = \rho_0 e^{\omega t}\sin(\omega t) \\ y(t) = \rho_0 e^{\omega t}\cos(\omega t) \end{cases}$

Exercice 1 (6 points)

La cycloïde est une trajectoire décrite par un point d'un cercle de rayon *R* roulant sans glisser sur une droite (*D*). On peut aussi définir la cycloïde comme la trajectoire d'un mouvement composé d'un mouvement rectiligne uniforme et d'un mouvement circulaire uniforme de même vitesse.
Les équations horaires en coordonnées cartésiennes de ce mouvement sont :

$\begin{cases} x(t) = A(\omega t - \sin(\omega t)) \\ y(t) = A(1 - \cos(\omega t)) \end{cases}$; *Où A et ω* sont des constantes positives.

1- Déterminer les composantes cartésiennes des vecteurs vitesse et accélération.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{x}\,\vec{u}_x + \dot{y}\,\vec{u}_y$$

$$= A(\omega - \omega\cos(\omega t))\,\vec{u}_x + (A\omega\sin(\omega t))\,\vec{u}_y$$

1

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x = A\omega(1 - \cos(\omega t)) \\ v_y = A\omega\sin(\omega t) \end{pmatrix}_{(\vec{u}_x, \vec{u}_y)}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x = A\omega^2 \sin(\omega t) \\ \dot{v}_y = A\omega^2 \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

1

$$\vec{a}(t) = \underbrace{A\omega^2 \sin(\omega t)}_{a_x(t)} \vec{u}_x + \underbrace{A\omega^2 \cos(\omega t)}_{a_y(t)} \vec{u}_y .$$

2- En déduire la norme de chacun de ces vecteurs. On donne : $1 - \cos(\alpha) = 2\,sin^2(\alpha/2)$.

norme de $\vec{v}(t)$

$$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$= \sqrt{A^2\omega^2(1-\cos(\omega t))^2 + A^2\omega^2 \sin^2(\omega t)}$$

$$= A\omega . \sqrt{1 - 2\cos(\omega t) + \underbrace{\cos^2 \omega t + \sin^2(\omega t)}_{=1}}$$

1,5

$$= A\omega . \sqrt{2(1-\cos(\omega t))}$$

or $\left(1-\cos(\omega t) = 2\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right)$ (donné).

d'où $v(t) = A\omega\sqrt{2} . \sqrt{2\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)} = 2A\omega \left|\sin\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right|$

norme de $\vec{a}(t)$

$$a(t) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{A^2\omega^4(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t))}$$

$$a = A\omega^2$$

0,5

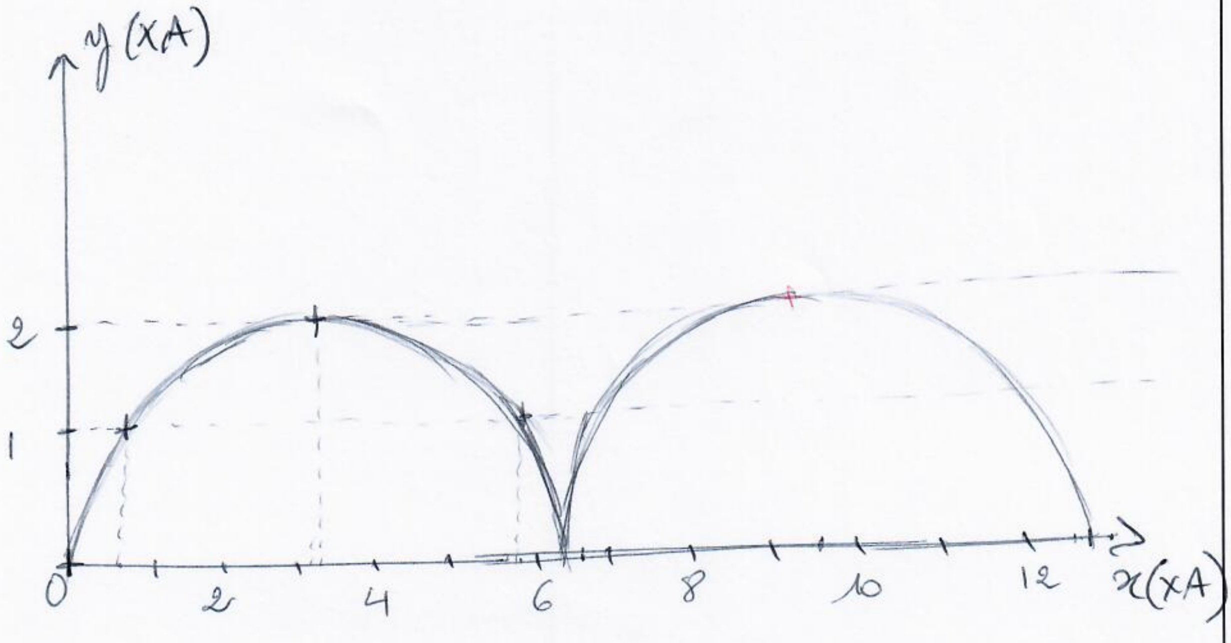
3-Tracer la cycloïde ($y = f(x)$), sur un intervalle de temps de 2 périodes (2T). Sachant que la pulsation ω est relié à la période T par : $\boldsymbol{\omega = 2\pi / T}$

(On prend les valeurs : $t = 0$; $t = T/4$; $t = T/2$; $t = 3T/4$; $t = T$).

$$\begin{cases} x(t) = A(\omega t - \sin(\omega t)) \\ y(t) = A(1 - \cos(\omega t)) \end{cases}$$

2

t	0	$T/4$	$T/2$	$3T/4$	T
$\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$	0	1	0	-1	0
$\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$	1	0	-1	0	1
$x(t)$ $(\times A)$	0	$\simeq 0,6$	3,14	5,7	$\simeq 6,3$
$y(t)$ $(\times A)$	0	1	2	1	0



Exercice 2 (6 points)

On considère un mouvement hélicoïdal d'équations horaires en coordonnées catésiennes données par

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\sin(\omega t) \\ z(t) = H\omega t \end{cases}$$ (R, ω et H sont des constantes positives)

1- Exprimer le vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes, en déduire sa norme.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{x}\,\vec{u}_x + \dot{y}\,\vec{u}_y + \dot{z}\,\vec{u}_z$$

$$= \underbrace{\left(-R\omega\sin(\omega t)\right)}_{v_x(t)}\vec{u}_x + \underbrace{\left(R\omega\cos(\omega t)\right)}_{v_y(t)}\vec{u}_y + \underbrace{H\omega}_{v_z}\vec{u}_z$$

1

norme de $\vec{v}$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{R^2\omega^2\underbrace{(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t))}_{1=} + H^2\omega^2}$$

$$v = \omega\sqrt{R^2 + H^2}$$

2- Exprimer le vecteur accélération en coordonnées cartésiennes, en déduire sa norme.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}_x\,\vec{u}_x + \dot{v}_y\,\vec{u}_y + \dot{v}_z\,\vec{u}_z$$

$$= \left(-R\omega^2\cos(\omega t)\right)\vec{u}_x + \left(-R\omega^2\sin^2(\omega t)\right)\vec{u}_y + 0\,\vec{u}_z$$

norme de $\vec{a}$

1

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{R^2\omega^4\underbrace{(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))}_{1=}}$$

$$a = R\omega^2$$

3- a) Utiliser les équations horaires données plus haut, ainsi que les équations de passage pour exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ en coordonnées cylindriques.

$$\vec{OM}_{cyl}(t) = \rho\,\vec{u}_\rho + z\,\vec{u}_z$$

1

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{R^2\cos^2(\omega t) + R^2\sin^2(\omega t)} = R$$

$$z_{cyl} = z_{cartés} = H\omega t$$

$$\vec{OM}_{cyl}(t) = R\,\vec{u}_\rho + (H\omega t)\,\vec{u}_z$$

b) Exprimer les vecteurs vitesse et accélération en coordonnées cylindriques, retrouver les normes de ces vecteurs calculées aux questions 1 et 2.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = R\dot{\vec{u}_\rho} + (H\omega)\vec{u_z}.$$

1,5

$\dot{\vec{u}_\rho} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$ (à l'aide de $x(t)$ et $y(t)$ on trouve $\dot{\theta} = \omega$).

$\vec{v} = (R\omega)\vec{u}_\theta + (H\omega)\vec{u_z}$ —> norme : $v = \sqrt{R^2\omega^2 + H^2\omega^2}$.

$v = \omega\sqrt{R^2 + H^2}$!

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\omega(-\dot{\theta}\vec{u}_\rho) + \vec{0}$$

$= (-R\omega^2)\vec{u}_\rho$ —> norme : $a = R\omega^2$.

On retrouve bien les normes calculés dans ① et ②.

Exercice 3 (4 points)

Un point matériel décrit un cercle de centre 0 et de rayon R avec une vitesse $\vec{v}$ de norme :

$$v(t) = \frac{v_0}{1+\alpha.t} \text{ ; Où } v_0 \text{ et } \alpha \text{ sont des constantes positives.}$$

1- a) Exprimer l'abscisse curviligne s(t), sachant que $s(t_0 = 0) = 0$.

$s(t) = \int_0^t v(t)\,dt + s_0$ car $v = \frac{ds}{dt}$.

1

$s(t) = \int_0^t \frac{v_0}{1+\alpha t}\,dt$ on pose : $u = 1+\alpha t \Rightarrow du = \alpha dt$

$dt = \frac{1}{\alpha}du$.

$s(t) = \frac{v_0}{\alpha} \cdot \int_1^{1+\alpha t} \frac{du}{u} = \frac{v_0}{\alpha}\left[\ln(u)\right]_1^{1+\alpha t}$ ($\ln(1) = 0$).

$$s(t) = \frac{v_0}{\alpha}\ln(1+\alpha t)$$

b) En déduire le temps au bout duquel le mobile fait un tour, en fonction de α, v_0 et R.

$$s(t) = \frac{v_0}{\alpha}\ln(1+\alpha t).$$

1

t ? tel que : $s(t) = 2\pi R$. (un tour).

$2\pi R = \frac{v_0}{\alpha}\ln(1+\alpha t) \Rightarrow \ln(1+\alpha t) = \frac{2\pi R\alpha}{v_0}$

$1+\alpha t = e^{\frac{2\pi R\alpha}{v_0}} \Rightarrow t = \frac{1}{\alpha}\left(e^{\frac{2\pi R\alpha}{v_0}} - 1\right)$

2- Exprimer les composantes a_T et a_N du vecteur accélération en base de Frenet. En déduire la norme du vecteur accélération dans cette même base.

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_0}{1+\alpha t}\right)$$

2

$$a_T = \frac{-\alpha v_0}{(1+\alpha t)^2}$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{v_0^2}{R(1+\alpha t)^2}$$

norme

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{\frac{\alpha^2 v_0^2}{(1+\alpha t)^4} + \frac{v_0^4}{R^2(1+\alpha t)^4}}$$

$$a = \frac{v_0}{(1+\alpha t)^2} \sqrt{\alpha^2 + \frac{v_0^2}{R^2}}$$